対数的時間発展による非線形 Schrödinger 階層と Ablowitz-Ladik 階層の拡張

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

通常の１次元戸田階層は差分作用素 $\mathcal{L} = e^{\partial_s} + b(s) + c(s)e^{-\partial_s}$ に対する Lax 方程式系

$$\partial_{t_n}\mathcal{L} = [\mathcal{A}_n, \mathcal{L}], \quad \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{\geq 0} - \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{<0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

からなる（$(\quad)_{\geq 0}$ と $(\quad)_{<0}$ はそれぞれ e^{∂_s} に関する非負べき部分・負べき部分を表す）．Carlet, Dubrovin, Zhang は１次元戸田階層に対数的時間発展

$$\partial_{x_n}\mathcal{L} = [\mathcal{B}_n, \mathcal{L}], \quad \mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n \log \mathcal{L})_{\geq 0} - (\mathcal{L}^n \log \mathcal{L})_{<0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を加えて「拡張戸田階層」を構成した[1]．Milanov はこの拡張戸田階層に対して双線形形式を与えた[2]．ところで，１次元戸田階層は非線形シュレディンガー（NLS）階層の Bäcklund 変換列（NLS-戸田階層）とも見なせる．同様の意味で Ruijsenaars（あるいは相対論的）戸田階層（RT 階層）は Ablowitz-Ladik（AL）階層と対応している[3]．そこで本講演では，１次元戸田階層の対数的時間発展を NLS-戸田階層の言葉に翻訳し，その結果を AL 階層に拡張して，最終的には「拡張 RT 階層」の定式化（現時点では未完成）をめざす．興味深いことに，これらの NLS 型階層の対数的時間発展の構造はいわゆる「$1+2$ 次元拡張」（ミニツイスター空間と関連する）[4] とよく似ている．

拡張戸田階層の時間変数の組を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$，τ 函数を $\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ と表す．対応する NLS-戸田階層の 2×2 行列値波動函数は

$$\Psi(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z) = W(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z)\,\mathrm{diag}(z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2},\ z^{-s-\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)/2})$$

となることがわかる（z はスペクトルパラメータである）．ここで

$$W(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})} & \dfrac{z^{-1}\tau(s+1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} + [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})} \\ \dfrac{z^{-1}\tau(s-1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})} & \dfrac{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} + [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})} \end{pmatrix},$$

$$\xi(\boldsymbol{x}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n, \quad \xi(\boldsymbol{t}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n, \quad [z^{-1}] = (z^{-1}, \frac{z^{-2}}{2}, \frac{z^{-3}}{3}, \ldots).$$

定理　$\Psi(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z)$ は次の各方程式を満たす．

(1) 代数的条件 $\det W(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z) = 1$

---

[1] G. Carlet, B. Dubrovin, Y. Zhang, Moscow Math. J. **4** (2004), 313-332.
[2] T. Milanov, Duke. Math. J. **138** (2008), 161–178.
[3] S. Kharchev, A. Mironov and A. Zhedanov, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997), 2675–2724; Yu.B. Suris, Inverse Problems **13** (1997), 1121–1136: T. Sadakane, J. Phys. A36 (2003), 87–97.
[4] I.A.B. Strachan, J. Math. Phys. **33** (1992), 2477–2482; S. Kakei, T. Ikeda and K. Takasaki, Ann. Henri Poincaré **3** (2002), 817–845.

(2) 補助線形方程式系

$$e^{\partial_s}\Psi = L\Psi, \quad \partial_{t_n}\Psi = A_n\Psi, \quad \partial_{x_n}\Psi = z^n\partial_s\Psi + B_n\Psi \quad (n=1,2,\dots)$$

ここで L は $L = \begin{pmatrix} z - \partial_{t_1}\log\frac{\tau(s+1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} & -\frac{\tau(s+1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} \\ \frac{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\tau(s+1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} & 0 \end{pmatrix}$ という行列であり，A_n, B_n は $W(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z)$ によって

$$A_n = \frac{1}{2}\left(W\,\mathrm{diag}(z^n,-z^n)W^{-1}\right)_{\geq 0}, \quad B_n = -\left(z^n\partial_s W W^{-1}\right)_{\geq 0}$$

と表せる（ここでは $(\quad)_{\geq 0}$ は z の非負べき部分を表す）.

(3) 双線形方程式

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^k \Psi(s' - \xi(\boldsymbol{a},z), \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{t}', z)\Psi(s-\xi(\boldsymbol{b},z), \boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}, z)^{-1} = 0 \quad (k \geq 0)$$

（$s', s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}', \boldsymbol{t}$ は任意の値をとる）.

この結果（既知の事実の再解釈に過ぎないが）を AL 階層に拡張する．AL 階層はもともと 2 系列の時間変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \dots)$, $\bar{\boldsymbol{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots)$ をもち，

$$e^{\partial_s}\Psi = L\Psi, \quad \partial_{t_n}\Psi = A_n\Psi, \quad \partial_{\bar{t}_n}\Psi = \bar{A}_n\Psi \quad (n=1,2,\dots)$$

という補助線形方程式系を伴っている．ここで L は $L = \begin{pmatrix} \zeta & q(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) \\ r(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$ という形の行列（ζ はスペクトルパラメータ）である．また $A_n, \bar{A}_n$ はそれぞれ ζ, ζ^{-1} の多項式からなる行列であり，$(1,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分は ζ の偶函数，$(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分は ζ の奇函数である．実際には

$$\begin{aligned} \Psi(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta) &= W(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)\,\mathrm{diag}(\zeta^s e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)}, \zeta^{-s}e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}), \\ \bar{\Psi}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta) &= \bar{W}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)\,\mathrm{diag}(\zeta^s e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}, \zeta^{-s}e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)}) \end{aligned}$$

という形の 2 個の行列値波動函数が用意される．$W(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta), \bar{W}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)$ はそれぞれ ζ^{-1}, ζ の整級数である．さらに 3 個の τ 函数 $\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$, $\sigma(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$, $\bar{\sigma}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ が定義される[5].

この設定のもとで 2 系列の対数的時間発展が導入できる．その時間変数を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$ とする．波動函数は上の表示で指数函数部分の $\zeta^{\pm s}$ を

$$\zeta^s \to \zeta^{s+\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)+\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}, \quad \zeta^{-s} \to \zeta^{-s-\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}$$

と置き換えた形になる．また，$\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}$ の時間発展に関する補助線形方程式系として

$$\partial_{x_n}\Psi = \zeta^{2n}\partial_s\Psi + B_n\Psi, \quad \partial_{\bar{x}_n}\Psi = \zeta^{-2n}\partial_s\Psi + \bar{B}_n\Psi \quad (n=1,2,\dots)$$

という形の方程式（$B_n, \bar{B}_n$ はそれぞれ ζ, ζ^{-1} の多項式からなる行列である）が加わる．詳細ならびに「拡張 RT 階層」に関する研究の進捗状況は講演の際に説明する．

[5] V.E. Vekslerchik, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 1087–1099; J. Nonlin. Math. **9** (2002), 157–180.