対数的時間発展による非線形Schrödinger階層とAblowitz-Ladik階層の拡張

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

Carlet, Dubrovin, Zhang は通常の１次元戸田階層に「対数的時間発展」を加えて「拡張戸田階層」を構成した．Milanov はこの拡張戸田階層に対して双線形形式を与えた．ところで，１次元戸田階層は非線形シュレディンガー（NLS）階層のBäcklund変換列（NLS-戸田階層）とも見なせる．同様の意味でRuijsenaars-戸田階層（RT階層）はAblowitz-Ladik（AL）階層と対応している（Kharchev, Mironov Zedhanov; Suris; Sadakane）．本講演では，１次元戸田階層の対数的時間発展をNLS-戸田階層の言葉に翻訳し，その結果がAL階層に拡張できることを示す.

1．１次元戸田階層からNLS-戸田階層へ：知られていることの要約

- ２次元戸田階層からの簡約

$$(\partial_{t_n} + \partial_{\bar{t}_n})\tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) = 0 \ (n = 1, 2, \ldots) \ \Rightarrow \ \tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) = \tau(s, \boldsymbol{t} - \bar{\boldsymbol{t}})$$

１系列の時間変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$ が残る.

- Lax作用素 $\mathcal{L} = e^{\partial_s} + b(s) + c(s)e^{-\partial_s}$ に対するLax方程式系

$$\partial_{t_n}\mathcal{L} = [\mathcal{A}_n, \mathcal{L}], \quad \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{\geq 0} - \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{<0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ここで $(\quad)_{\geq 0}$ と $(\quad)_{<0}$ はe^{∂_s} に関する非負べき部分・負べき部分を表す.

- ２次元階層の簡約から得られる波動函数対

$$\Phi = \frac{\tau(s, \boldsymbol{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{t})} z^s e^{\xi(\boldsymbol{t}, z)/2}, \ \bar{\Phi} = \frac{\tau(s + 1, \boldsymbol{t} + [z])}{\tau(s, \boldsymbol{t})} z^s e^{-\xi(\boldsymbol{t}, z^{-1})/2}$$

ここで $\xi(\boldsymbol{t}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n$, $[z] = (z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{3}, \ldots)$.

- 2×2 行列型波動函数

$$\Psi(s, \boldsymbol{t}, z) = W(s, \boldsymbol{t}, z)\,\mathrm{diag}(z^s e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2},\ z^{-s} e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)/2}),$$

$$W(s, \boldsymbol{t}, z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s, \boldsymbol{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{t})} & \dfrac{z^{-1}\tau(s+1, \boldsymbol{t} + [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{t})} \\ \dfrac{z^{-1}\tau(s-1, \boldsymbol{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{t})} & \dfrac{\tau(s, \boldsymbol{t} + [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{t})} \end{pmatrix}$$

を導入する（チャージ付き2成分KP階層の簡約の波動函数とも見なせる）. この行列値波動函数は以下の各方程式（NLS-戸田階層の構成要素）を満たす.

(1) 代数的条件 $\det W(s, \boldsymbol{t}, z) = 1$

(2) 補助線形方程式系

$$e^{\partial_s}\Psi = L\Psi, \quad \partial_{t_n}\Psi = A_n\Psi, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ここで

$$L = \begin{pmatrix} z - \partial_{t_1} \log \frac{\tau(s+1,\boldsymbol{t})}{\tau(s,\boldsymbol{t})} & -\frac{\tau(s+1,\boldsymbol{t})}{\tau(s,\boldsymbol{t})} \\ \frac{\tau(s,\boldsymbol{t})}{\tau(s+1,\boldsymbol{t})} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_n = \frac{1}{2}\Big(W\,\mathrm{diag}(z^n, -z^n)W^{-1}\Big)_{\geq 0},$$

$(\quad)_{\geq 0}$ は z に関する多項式部分を表す．これに付随するLax方程式系

$$\partial_{t_n} L(s) = A_n(s+1)L(s) - L(s)A_n(s)$$

は１次元戸田階層の別表現を与える．

(3) 双線形方程式

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^k \Psi(s', \boldsymbol{t}', z)\Psi(s, \boldsymbol{t}, z)^{-1} = 0 \quad (k \geq 0)$$

（$s, s', \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}'$ は任意の値をとる）．これから τ 函数に対する双線形方程式が得られる．

2．拡張戸田階層 ＝ 拡張NLS-戸田階層：Milanovの主張を見直す

• 拡張戸田階層は1次元戸田階層の時間発展 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$ に対数的時間発展 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ を付け加えたもの

$$\partial_{t_n}\mathcal{L} = [\mathcal{A}_n, \mathcal{L}], \quad \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{\geq 0} - \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{<0},$$
$$\partial_{x_n}\mathcal{L} = [\mathcal{B}_n, \mathcal{L}], \quad \mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n \log\mathcal{L})_{\geq 0} - (\mathcal{L}^n \log\mathcal{L})_{<0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

である．$\log\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ に対する2種類のdressing operatorを用いて定義される（説明省略）．

注意：Carlet，Dubrovin，Zhang の本来の定義では $\mathcal{L}^n\log\mathcal{L}$ の代わりに $\mathcal{L}^n(\log\mathcal{L} - c_n)$ （$c_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$）を用いるが，可積分構造に関して本質的な違いはない．

• τ 函数 $\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ が導入される．Milanovはそれに対して双線形方程式を導いている（証明は間違っているようだが）．

- 前述の 2×2 行列型波動函数を修正したもの（$z^{\pm\xi(\boldsymbol{x},z)}$ に注意）

$$\Psi(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z) = W(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z)\,\mathrm{diag}(z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2},\ z^{-s-\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)/2}),$$

$$W(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} & \dfrac{z^{-1}\tau(s+1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}+[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} \\ \dfrac{z^{-1}\tau(s-1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} & \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}+[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} \end{pmatrix}$$

を導入する．$\Psi(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z)$ は以下の各方程式を満たす.

(1) 代数的条件 $\det W(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = 1$

(2) 補助線形方程式系

$$e^{\partial_s}\Psi = L\Psi, \quad \partial_{t_n}\Psi = A_n\Psi, \quad \partial_{x_n}\Psi = z^n\partial_s\Psi + B_n\Psi \quad (n=1,2,\ldots)$$

ここで L, A_n は前と同じものであり，B_n は $B_n = -(z^n\partial_s W\cdot W^{-1})_{\geq 0}$ で与えられる.

(3) 双線形方程式

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^k \Psi(s' - \xi(\boldsymbol{b}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}', z) \Psi(s - \xi(\boldsymbol{a}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t}, z)^{-1} = 0 \quad (k \geq 0)$$

（$s, s', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}'$ は任意の値をとる）.

注意

- NLS階層の「1 + 2 次元拡張」と似ている.
- (3) からτ函数に対する双線形方程式

$$\begin{aligned} &\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{k+s'-s} e^{\xi(\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t}, z)/2} \tau(s' - \xi(\boldsymbol{b}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}' - [z^{-1}]) \\ &\qquad\qquad\qquad \times \tau(s - \xi(\boldsymbol{a}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t} + [z^{-1}]) \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{k+s-s'-2} e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}', z)/2} \tau(s' + 1 - \xi(\boldsymbol{b}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}' + [z^{-1}]) \\ &\qquad\qquad\qquad \times \tau(s - 1 - \xi(\boldsymbol{a}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t} - [z^{-1}]) \quad (k \geq 0) \end{aligned}$$

（Milanovが与えた双線形方程式を含む）が得られる.

3. Ablowitz-Ladik 階層：Vekslerchikによる定式化

• AL階層は2系列の時間変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$, $\bar{\boldsymbol{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots)$ をもち，2×2 行列 $L = \begin{pmatrix} \zeta & q(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) \\ r(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$ （ζ はスペクトルパラメータ）に対するLax方程式系

$$
\begin{aligned}
\partial_{t_n} L(s) &= A_n(s+1)L(s) - L(s)A_n(s), \\
\partial_{\bar{t}_n} L(s) &= \bar{A}_n(s+1)L(s) - L(s)\bar{A}_n(s)
\end{aligned}
$$

で定義される．$A_n, \bar{A}_n$ はそれぞれζ, ζ^{-1} の多項式からなる行列であり，ζ について

$$
\begin{aligned}
A_n|_{\zeta \to -\zeta} &= \mathrm{diag}(1, -1) A_n \, \mathrm{diag}(1, -1), \\
\bar{A}_n|_{\zeta \to -\zeta} &= \mathrm{diag}(1, -1) \bar{A}_n \, \mathrm{diag}(1, -1)
\end{aligned}
$$

という奇偶性条件を満たす（言い換えれば対角要素は偶多項式，非対角要素は奇多項式である）.

- 補助線形問題

$$e^{\partial_s}\Psi = L\Psi,\ \partial_{t_n}\Psi = A_n\Psi,\ \partial_{\bar{t}_n}\Psi = \bar{A}_n\Psi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

に対して 2 種類の行列値波動函数

$$\Psi(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = W(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)\,\mathrm{diag}(\zeta^s e^{\xi(\boldsymbol{t}, \zeta^2)}, \zeta^{-s} e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}}, \zeta^{-2})}),$$
$$\bar{\Psi}(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = \bar{W}(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)\,\mathrm{diag}(\zeta^s e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}}, \zeta^{-2})}, \zeta^{-s} e^{\xi(\boldsymbol{t}, \zeta^2)})$$

が導入される． $W(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)$ と $\bar{W}(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)$ はそれぞれ ζ^{-1}, ζ の整級数からなる行列であり，$\zeta \to -\zeta$ に関して $A_n, \bar{A}_n$ と同様の奇偶性をもち，代数的条件

$$\det W(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = \det \bar{W}(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = \frac{\tau(s+1, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})}$$

を満たす.

- 次の等式が成立するように３個のτ函数 $\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$, $\sigma(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$, $\bar\sigma(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ が導入される：

$$W(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)=\begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{t}-[\zeta^{-2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & -\dfrac{\zeta^{-1}\sigma(s+1,\boldsymbol{t}+[\zeta^{-2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \\ \dfrac{\zeta^{-1}\bar\sigma(s,\boldsymbol{t}-[\zeta^{-2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & \dfrac{\tau(s+1,\boldsymbol{t}+[\zeta^{2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \end{pmatrix},$$

$$\bar W(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)=\begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s+1,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}-[\zeta^{2}])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & \dfrac{\zeta\sigma(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}+[\zeta^{2}])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \\ -\dfrac{\zeta\bar\sigma(s+1,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}-[\zeta^{2}])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}+[\zeta^{2}])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \end{pmatrix}$$

- NLS-戸田階層の周回積分型双線形方程式に対応するものとして

$$\Psi(s',\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}',\zeta)\Psi(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)^{-1}=\bar\Psi(s',\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}',\zeta)\bar\Psi(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)^{-1}$$

という方程式が成立する．これから $\tau,\sigma,\bar\sigma$ に対する双線形方程式が得られる．

4. 拡張Ablowitz-Ladik階層：AL階層に対数的時間発展を導入する

新たに2系統の時間変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$ を用意し，NLS-戸田階層の場合にならって $\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}$ の時間発展に関する補助線形方程式系

$$\partial_{x_n}\Psi = \zeta^{2n}\partial_s\Psi + B_n\Psi,\ \partial_{\bar{x}_n}\Psi = \zeta^{-2n}\partial_s\Psi + \bar{B}_n\Psi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を追加することができる（$B_n, \bar{B}_n$ は ζ, ζ^{-1} の多項式からなる行列で，$A_n, \bar{A}_n$ と同様の奇偶性をもつ）．拡張NLS-戸田階層の場合に対応する結果として，以下のことがわかる．

1) $\Psi, \bar{\Psi}$ は

$$\begin{aligned}
&\Psi(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = W(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)\\
&\times \mathrm{diag}(\zeta^{s+\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)+\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)}, \zeta^{-s-\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2}}e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}),\\
&\bar{\Psi}(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = \bar{W}(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)\\
&\times \mathrm{diag}(\zeta^{s+\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)+\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}, \zeta^{-s-\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)})
\end{aligned}$$

という形に変わる（$\zeta^{\pm\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)\pm\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}$ に注意）．

2) $W, \bar{W}$ の満たす代数的条件は変わらない.

3) $\tau, \sigma, \bar{\sigma}$ による $W, \bar{W}$ の表示式は変わらない.

4) 波動函数に対する双線形方程式は

$$
\begin{aligned}
&\Psi(s' - \xi(\boldsymbol{b}, \zeta^2) - \xi(\bar{\boldsymbol{b}}, \zeta^{-2}), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{t}', \bar{\boldsymbol{t}}', \zeta) \\
&\qquad \times \Psi(s - \xi(\boldsymbol{a}, \zeta^2) - \xi(\bar{\boldsymbol{a}}, \zeta^{-2}), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)^{-1} \\
&\qquad = \bar{\Psi}(s' - \xi(\boldsymbol{b}, \zeta^2) - \xi(\bar{\boldsymbol{b}}, \zeta^{-2}), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{t}', \bar{\boldsymbol{t}}', \zeta) \\
&\qquad\qquad \times \bar{\Psi}(s - \xi(\boldsymbol{a}, \zeta^2) - \xi(\bar{\boldsymbol{a}}, \zeta^{-2}), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)^{-1}
\end{aligned}
$$

（$s, s', \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}', \bar{\boldsymbol{t}}, \bar{\boldsymbol{t}}$ は任意の値をとる）という形になる. これから $\tau, \sigma, \bar{\sigma}$ に対する双線形方程式が得られる.