

# 溶解結晶模型の可積分構造

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

溶解結晶模型は5次元超対称ゲージ理論 [1, 2] やトーリック多様体上の位相的弦理論 [3] と関係する統計力学的模型である，その分配函数に外部ポテンシャルを導入したものは結合定数に関して1次元戸田階層の特殊解の函数となる [4]．さらに，結晶に一種の非対称性を導入した模型にも同様の可積分構造（2次元戸田階層の簡約）がある [5]．以下ではこれらの結果を基礎の部分から解説する．

## 1 溶解結晶模型

溶解結晶模型は  $xyz$  空間の第1象限を占める無限に大きい結晶の角が解けて熱平衡状態に達した状態を統計力学の模型として定式化したものである．ただし，結晶は座標平面に平行な面をもつ立方体  $[i-1, i] \times [j-1, j] \times [k-1, k]$  ( $i, j, k = 1, 2, \dots$ ) からできていて，その境界面は原点から見てオーバーハングがない，と仮定する．このような結晶の第1象限における補集合はヤング図形の3次元版（3次元ヤング図形）になる．この3次元ヤング図形を結晶の形を指定するラベルとして用いることにする．

3次元ヤング図形において  $xy$  平面の正方形  $[i-1, i] \times [j-1, j]$  の上に積まれた立方体の個数を  $\pi_{ij}$  と表せば， $\pi_{ij}$  は  $\pi_{ij} \geq \pi_{i,j+1}$ ,  $\pi_{ij} \geq \pi_{i+1,j}$  という不等式を満たす非負整数であり，それを並べた2次元配列

$$\pi = (\pi_{ij})_{i,j=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

は平面分割と呼ばれるものになる．たとえば図1には

$$\pi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

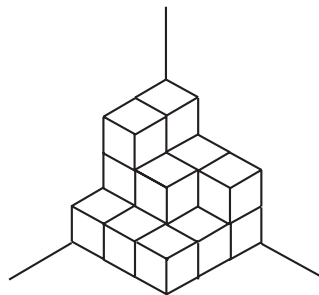


図 1: 3次元ヤング図形

という平面分割 (0 が並ぶところは省いた) が対応している. もともと「分割」という言葉は, この例で言えば, 16 を  $16 = 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$  というように正整数の和に分けることに由来している (平面分割の場合にはこれらの正整数をさらに平面上に配置する) が, ここでは正整数の組自体を分割と呼ぶ. その総和 (言い換えれば 3次元ヤング図形の体積) を

$$|\pi| = \sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{ij}.$$

と表す. これ以後, 3次元ヤング図形と平面分割を同一視する.

ちなみに, 通常ヤング図形は 1次元配列としての分割  $\lambda = (\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$  ( $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$  という不等式を満たす) と同一視される. ヤング図形をフランス式に  $xy$  平面の第 1 象限に描くとき,  $\lambda_i$  は  $x$  軸の区間  $[i-1, i]$  の上に積まれた正方形の個数である. 特に, ヤング図形の面積は  $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$  に等しい. さらに, 包含関係 ( $\lambda \supseteq \mu$  という記号で表す) にあるヤング図形に対してその差集合を  $\lambda/\mu$  という記号で表して歪ヤング図形と呼び, その面積を  $|\lambda/\mu|$  と表す (もちろん  $|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu|$  となる).

溶解結晶模型では平面分割  $\pi$  が定める形の結晶 (3次元ヤング図形の補集合) のボルツマン重みを  $q^{|\pi|}$  ( $0 < q < 1$ ) と定める. 分配関数は

$$Z = \sum_{\pi} q^{|\pi|} \tag{1}$$

という総和で与えられる. 次の 2 節と 3 節では, オクニコフとレシエティヒンのアイデア [6] に従って, この分配関数がシューア函数やフェルミオンと関係することを説明する.

## 2 シューア函数との関係

3次元ヤング図形を  $y - x = m$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) という平面で切った断面を ( $m$  番目の) 対角断面という (図 2). 対角断面は

$$\pi(m) = \begin{cases} (\pi_{i,i+m})_{i=1}^{\infty} & (m \geq 0 \text{ の場合}) \\ (\pi_{j-m,j})_{j=1}^{\infty} & (m < 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

という分割で表され,

$$\cdots \prec \pi(-2) \prec \pi(-1) \prec \pi(0) \succ \pi(1) \succ \pi(2) \succ \cdots$$

という条件を満たす. ここで  $\succ$  は交錯関係 (interlacing relation) と呼ばれるもの

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \succ \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots) \stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots$$

である. これは包含関係  $\lambda \supseteq \mu$  よりも強い条件であり, 歪ヤング図形  $\lambda/\mu$  が辺を共有しない幅 1 の長方形に分かれること<sup>1</sup>と同値である.

この対角断面列によって主対角断面

$$\lambda = \pi(0)$$

<sup>1</sup>ヤング図形をイギリス式に第 4 象限に描けば, これはいわゆる水平帯 (horizontal strip) である.

の表すヤング図形上に2種類の半標準盤  $T, T'$  が定まる(図3)。 $T$  は  $\pi(-m)/\pi(-m-1)$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) に属する正方形に  $m+1$  を書き込んで得られるヤング盤であり,  $T'$  は  $\pi(m)/\pi(m+1)$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) に属する正方形に  $m+1$  を書き込んで得られるヤング盤である。上に述べた交錯条件によって,  $T, T'$  上の正整数は半標準盤が満たすべき条件(右方向に狭義単調減少列, 上方向に単調減少列となる)<sup>2</sup>を満たしている。逆に, ヤング図形  $\lambda$  上に半標準盤の対  $T, T'$  が与えられれば, 以上の道筋を逆にたどって  $\lambda$  を主対角断面とする平面分割  $\pi$  が決まる。

このように平面分割  $\pi$  はヤング図形・半標準盤対からなる3つ組  $(\lambda, T, T')$  と1対1に対応するので, (1)の右辺を3つ組に関する総和と見なすことができる。さらに, 3次元ヤング図形の左半分・右半分の重みと呼ぶべきもの

$$q^T = \prod_{m=0}^{\infty} q^{(m+1/2)|\pi(-m)/\pi(-m-1)|}, \quad q^{T'} = \prod_{m=0}^{\infty} q^{(m+1/2)|\pi(m)/\pi(m+1)|}$$

を導入すれば,  $\pi$  のボルツマン重み  $q^{|\pi|}$  はそれらの積として  $q^{|\pi|} = q^T q^{T'}$  と表せるので, 分配関数は  $T, T'$  に関する総和を先に行った形

$$Z = \sum_{\lambda} \left( \sum_T q^T \right) \left( \sum_{T'} q^{T'} \right)$$

に書き直せる。

シューア函数の半標準盤表示によれば, ここに現れた部分和は(無限変数の)シューア函数  $s_{\lambda}(x_1, x_2, \dots)$  を用いて

$$\sum_T q^T = \sum_{T'} q^{T'} = s_{\lambda}(q^{\rho}), \quad q^{\rho} = (q^{1/2}, q^{3/2}, \dots, q^{n+1/2}, \dots)$$

と表せる<sup>3</sup>。こうしてシューア函数の特殊値による分配関数の展開公式

$$Z = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(q^{\rho})^2 \tag{2}$$

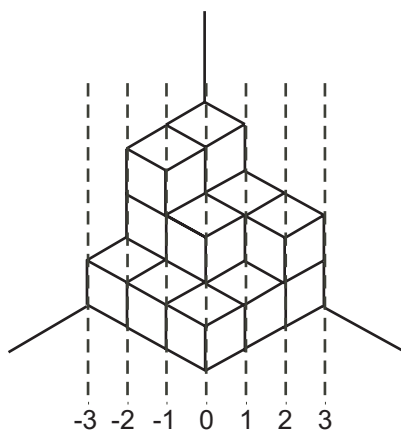


図 2: 対角断面

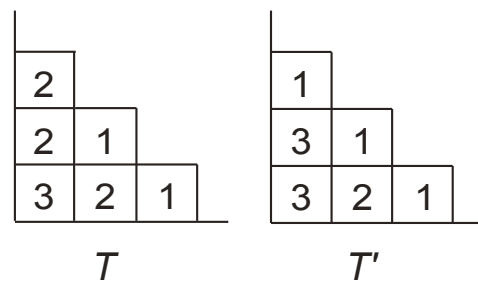


図 3: 主対角断面の上の半標準盤

<sup>2</sup>普通は減少列ではなくて増加列を考えるが, ヤング図形を固定してその上のヤング盤を考える限り, どちらでも同じことである。

<sup>3</sup>文献ではここで現れた  $q^{\rho}$  を  $q^{-\rho}$  と書くのが普通のものである。

が得られる．シューア函数のフェルミオン表示を用いればこの総和を計算できる．

### 3 分配函数のフェルミオン表示

複素自由フェルミ場

$$\psi(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m z^{-m-1}, \quad \psi^*(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m^* z^{-m}$$

を導入する<sup>4</sup>．フーリエモード  $\psi_n, \psi_n^*$  は

$$\{\psi_m, \psi_n^*\} = \delta_{m+n,0}, \quad \{\psi_m, \psi_n\} = \{\psi_m^*, \psi_n^*\} = 0$$

という反交換関係を満たす．これらが作用するフォック空間と双対フォック空間はチャージが一定の状態ベクトルがなす部分空間の直和になる．チャージ  $s$  の部分空間における正規化された基底状態（フェルミ海）は

$$\langle s | = \langle -\infty | \cdots \psi_{s-2}^* \psi_{s-1}^* \psi_s^*, \quad |s\rangle = \psi_{-s} \psi_{-s+1} \psi_{-s+2} \cdots |-\infty\rangle$$

で与えられる．励起状態は  $\langle \lambda; s |, |\lambda; s\rangle$  というように分割  $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$  でラベルづけられていて ( $s=0$  のときには  $\langle \lambda |, |\lambda\rangle$  と略記する), 基底状態から

$$|\lambda; s\rangle = \psi_{-(s+\lambda_1-1)-1} \cdots \psi_{-(s+\lambda_n-n)-1} \psi_{(s-n)+1}^* \cdots \psi_{(s-1)+1}^* |s\rangle.$$

というように生成される ( $n$  は  $i > n$  のとき  $\lambda_i = 0$  となるように十分大きく選ぶ)．これらの状態ベクトルは内積に関して

$$\langle \lambda; r | \mu; s\rangle = \delta_{\lambda\mu} \delta_{rs}$$

という意味で双対基底をなしている．

シューア函数をフェルミオン表示するため, フェルミ場のカレント  $J(z) = :\psi(z)\psi^*(z):$  のフーリエモード

$$J_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} :\psi_{m-n}\psi_n^*: \quad (3)$$

を用いる．ここで  $:$  は正規順序積 ( $:\psi_m\psi_n^*: = \psi_m\psi_n^* - \langle 0|\psi_m\psi_n^*|0\rangle$ ) である． $J_n$  は

$$[J_m, J_n] = m\delta_{m+n,0} \quad (m, n \in \mathbf{Z}), \quad \langle s|J_{-n} = 0, \quad J_n|s\rangle = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

という性質をもつ．

$J_n$  を用いればシューア函数  $s_\lambda(x_1, x_2, \dots)$  は

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots) = \langle 0 | \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_k J_k\right) | \lambda \rangle = \langle \lambda | \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_k J_{-k}\right) | 0 \rangle$$

<sup>4</sup>フーリエモードのラベル付けが通常のものとは違うが, あまり気にする必要はない．

と表せる．ここで  $T_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ )<sup>5</sup> は KP 階層の時間変数に相当するものであり，

$$T_k = \frac{1}{k} \sum_{i \geq 1} x_i^k$$

で与えられる．このフェルミオン表示は KP 階層の 函数のフェルミオン表示の特別な場合に他ならない．特に，変数の値を  $x_i = q^{i-1/2}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) と選べば， $s_\lambda(q^\rho)$  のフェルミオン表示

$$s_\lambda(q^\rho) = \langle 0|G_+|\lambda\rangle = \langle \lambda|G_-|0\rangle$$

が得られる．ここで  $G_\pm$  は

$$G_\pm = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k/2}}{k(1-q^k)} J_{\pm k}\right) \quad (5)$$

という作用素である．これから逆に

$$G_-|0\rangle = \sum_{\lambda} s_\lambda(q^\rho)|\lambda\rangle, \quad \langle 0|G_+ = \sum_{\lambda} \langle \lambda|s_\lambda(q^\rho)$$

という等式も読み取れる． $G_-|s\rangle, \langle s|G_+$  についても同様の等式が成立する．

以上のことから分配函数  $Z$  に対してフェルミオン表示

$$Z = \sum_{\lambda} \langle 0|G_+|\lambda\rangle \langle \lambda|G_-|0\rangle = \langle 0|G_+G_-|0\rangle \quad (6)$$

が得られる．さらに， $G_\pm$  が (4) からの帰結として

$$G_+G_- = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k(1-q^k)^2}\right) G_-G_+, \quad \langle 0|G_- = \langle 0|, \quad G_+|0\rangle = |0\rangle$$

という性質をもつことに注意すれば， $Z$  が最終的に

$$Z = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k(1-q^k)^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-n} \quad (7)$$

と表せることがわかる（右辺はマクマホン函数と呼ばれる）．

## 4 外部ポテンシャルを導入した分配函数

整数変数  $s$  と対角断面  $\lambda = \pi(0)$  に依存する外部ポテンシャルとして

$$\begin{aligned} \Phi_k(\lambda, s) &= \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(s+\lambda_i-i+1)} - \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(-i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (q^{k(s+\lambda_i-i+1)} - q^{k(s-i+1)}) + q^k \frac{1-q^{sk}}{1-q^k} \end{aligned}$$

<sup>5</sup>あとで導入する変数  $t_k$  と区別するため大文字にしている．

を導入する．ここで1行目はいわば発見的な定義式であり ( $|q| > 1$  でのみ収束する) , それを2行目のように解釈し直す (総和は有限和になるので, この量は  $q$  の有理関数である) . これらに対する結合定数の組  $t = (t_1, t_2, \dots)$  を用意して線形結合

$$\Phi(\lambda, s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \Phi_k(\lambda, s)$$

をつくり, その指数関数をボルツマン重みに乗じる．さらに, 新たなパラメータ  $Q$  を導入して  $Q^{|\lambda|+s(s+1)/2}$  も乗じる (要するに,  $\log Q$  を結合定数として外部ポテンシャル  $|\lambda| + s(s+1)/2$  を導入する) . このようにして変形された分配関数

$$Z(s, t) = \sum_{\pi} q^{|\pi|} Q^{|\pi(0)|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\pi(0), s, t)} \quad (8)$$

も  $\lambda = \pi(0)$  上の半標準盤  $T, T'$  に関する総和を先に行うことによって

$$Z(s, t) = \sum_{\lambda} s_{\lambda} (q^{\rho})^2 Q^{|\lambda|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\lambda, s, t)} \quad (9)$$

と書き直せる．この分配関数が可積分構造の考察の対象となる．

可積分構造の解明の出発点は  $Z(s, t)$  のフェルミオン表示である．それを与えるために

$$H_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{kn} : \psi_{-n} \psi_n^* :, \quad H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k, \quad L_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n : \psi_{-n} \psi_n^* \quad (10)$$

という作用素を導入する ( $L_0$  はヴィラソロ代数に属する) . これらに関して成立する等式

$$\begin{aligned} H_k |\lambda; s\rangle &= \Phi_k(\lambda, s) |\lambda; s\rangle, & L_0 |\lambda; s\rangle &= (|\lambda| + s(s+1)/2) |\lambda; s\rangle, \\ \langle \lambda; s | H_k &= \langle \lambda; s | \Phi_k(\lambda, s), & \langle \lambda; s | L_0 &= \langle \lambda; s | (|\lambda| + s(s+1)/2) \end{aligned}$$

( $\Phi_k(\lambda, s)$  の意味はこちらで考える方がわかりやすい) に注意すれば, フェルミオン表示

$$Z(s, t) = \sum_{\lambda} \langle s | G_+ | \lambda; s \rangle \langle \lambda; s | Q^{L_0} e^{H(t)} | \lambda; s \rangle \langle \lambda; s | G_- | s \rangle = \langle s | G_+ Q^{L_0} e^{H(t)} G_- | s \rangle \quad (11)$$

が得られる．しかしこれは KP 階層や戸田階層の 函数のフェルミオン表示とは異なる形をしていて, このままでは 函数と見なせるかどうかわからない．これを 函数の形に書き直すために  $Z(t, s)$  の背後に隠れている量子トーラス代数を利用する．

## 5 量子トーラス代数とシフト対称性

量子トーラス代数の基底  $V_m^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, m \in \mathbf{Z}$ )<sup>6</sup> を

$$V_m^{(k)} = q^{-km/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{kn} : \psi_{m-n} \psi_n^* : = q^{k/2} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m : \psi(q^{k/2} z) \psi^*(q^{-k/2} z) : \quad (12)$$

<sup>6</sup> $k$  の動く範囲を整数全体にすることもできる．ここではその半分を考えているので, 「トーラス」よりも「円柱」というべきだろう．

と定義する．これらは

$$[V_m^{(k)}, V_n^{(l)}] = (q^{(lm-kn)/2} - q^{(kn-lm)/2})(V_{m+n}^{(k+l)} - \delta_{m+n,0} \frac{q^{k+l}}{1-q^{k+l}}) \quad (13)$$

という交換関係を満たす． $J_m, H_k$  はこの代数に

$$J_m = V_m^{(0)}, \quad H_k = V_0^{(k)}$$

というように含まれている．

可積分構造の解明の鍵はこれらの基底が  $G_-G_+$  の随伴作用によって

$$G_-G_+ \left( V_m^{(k)} - \delta_{m,0} \frac{q^k}{1-q^k} \right) (G_-G_+)^{-1} = (-1)^k \left( V_{m+k}^{(k)} - \delta_{m+k,0} \frac{q^k}{1-q^k} \right) \quad (14)$$

と変換する（添え字がずれるのでシフト対称性と呼ぶ）という事実である．この等式は  $G_{\pm}$  の随伴作用のもとでフェルミ場が

$$\begin{aligned} G_+\psi(z)G_+^{-1} &= (q^{1/2}z; q)_{\infty}^{-1}\psi(z), & G_+\psi^*(z)G_+^{-1} &= (q^{1/2}z; q)_{\infty}\psi^*(z), \\ G_-\psi(z)G_-^{-1} &= (q^{1/2}z^{-1}; q)_{\infty}^{-1}\psi(z), & G_-\psi^*(z)G_-^{-1} &= (q^{1/2}z^{-1}; q)_{\infty}\psi^*(z) \end{aligned}$$

と変換すること（ここで  $(z; q)_{\infty} = \prod_{n=0}^{\infty} (1-zq^n)$  という  $q$  解析の慣用の記号を用いた）から若干の代数的計算によって導ける．

この等式 (14) を  $m=0, m=-k$  の場合に適用すれば ( $V_0^{(k)} = H_k$  に注意)

$$\begin{aligned} G_-G_+ \left( H_k - \frac{q^k}{1-q^k} \right) (G_-G_+)^{-1} &= (-1)^k V_k^{(k)}, \\ (G_-G_+)^{-1} \left( H_k - \frac{q^k}{1-q^k} \right) G_-G_+ &= (-1)^k V_{-k}^{(k)} \end{aligned}$$

という等式が得られる．さらに

$$W_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 : \psi_{-n} \psi_n^* : \quad (15)$$

という作用素（これはいわゆる  $W(3)$  代数に属する）を用いれば，右辺に現れた作用素  $V_{\pm k}^{(k)}$  を  $V_{\pm}^{(0)} = J_{\pm k}$  に

$$q^{W_0/2} V_k^{(k)} q^{-W_0/2} = J_k, \quad q^{-W_0/2} V_{-k}^{(k)} q^{W_0/2} = J_{-k},$$

と変換できる（直接計算によって確かめられる）．こうして  $H_k$  と  $J_{\pm k}$  を結ぶ等式

$$\begin{aligned} G_+ \left( H_k - \frac{q^k}{1-q^k} \right) G_+^{-1} &= (-1)^k G_-^{-1} q^{-W_0/2} J_k q^{W_0/2} G_-, \\ G_-^{-1} \left( H_k - \frac{q^k}{1-q^k} \right) G_- &= (-1)^k G_+ q^{W_0/2} J_{-k} q^{-W_0/2} G_+^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる．この等式を用いて  $Z(s, t)$  のフェルミオン表示 (11) を書き直す．

## 6 1次元戸田階層の特殊解としての解釈

$Z(s, t)$  のフェルミオン表示の中の作用素を乗法的に

$$G_+ Q^{L_0} e^{H(t)} G_- = G_+ e^{H(t)/2} G_+^{-1} \cdot G_+ Q^{L_0} G_- \cdot G_-^{-1} e^{H(t)/2} G_- \quad (17)$$

と分ける．最初と最後の部分を (16) を用いて書き直せば

$$G_+ e^{H(t)/2} G_+^{-1} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k q^k}{2(1-q^k)}\right) G_-^{-1} q^{-W_0/2} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t_k}{2} J_k\right) q^{W_0/2} G_-,$$

$$G_-^{-1} e^{H(t)/2} G_- = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k q^k}{2(1-q^k)}\right) G_+ q^{W_0/2} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t_k}{2} J_{-k}\right) q^{-W_0/2} G_+^{-1}$$

となる．これらを (11) に代入して

$$\langle s | G_-^{-1} q^{-W_0/2} = q^{-s(s+1)(2s+1)/12} \langle s |, \quad q^{-W_0/2} G_+^{-1} | s \rangle = q^{-s(s+1)(2s+1)/12} | s \rangle$$

という等式に注意すれば， $Z(s, t)$  は最終的に

$$Z(s, t) = \phi(s, t) \langle s | \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t_k}{2} J_k\right) g \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t_k}{2} J_{-k}\right) | s \rangle \quad (18)$$

という形に書き直される．ここでここで  $g$  は

$$g = q^{W_0/2} G_- G_+ Q^{L_0} G_- G_+ q^{W_0/2} \in \text{GL}(\infty) \quad (19)$$

という作用素であり， $\phi(s, t)$  は

$$\phi(s, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k q^k}{1-q^k}\right) q^{-s(s+1)(2s+1)/6} \quad (20)$$

という函数である．

こうして  $Z(s, t)$  と戸田階層の函数との関係が明らかになる．(18) の右辺の  $\langle s | \cdots | s \rangle$  の部分は  $g$  の定める2次元戸田階層の函数

$$\tau(s, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}) = \langle s | \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_k J_k\right) g \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{T}_k J_{-k}\right) | s \rangle$$

の変数を  $T_k = (-1)^k t_k/2$ ,  $\bar{T}_k = -(-1)^k t_k/2$  に特殊化したものである．さらに，(16) からの帰結として  $g$  に対して

$$J_k g = g J_{-k} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (21)$$

という等式が成立することがわかるので，この函数は

$$\frac{\partial}{\partial T_k} \tau(s, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}) + \frac{\partial}{\partial \bar{T}_k} \tau(s, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (22)$$

という条件を満たす．これは1次元戸田階層への簡約条件に他ならない．特に， $\tau(s, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}) = \tau(s, \mathbf{T} - \bar{\mathbf{T}}, \mathbf{0}) = \tau(s, \mathbf{0}, \bar{\mathbf{T}} - \mathbf{T})$  となるので，(18) の  $\langle s | \cdots | s \rangle$  の部分は

$$\langle s | \cdots | s \rangle = \langle s | \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k t_k J_k\right) g | s \rangle = \langle s | g \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k t_k J_{-k}\right) | s \rangle \quad (23)$$

というように書き直すこともできる．

こうして次の結論が得られる [4] ．



定理 1  $Z(s, t)$  は 1 次元戸田階層の特殊解の 関数に簡単な因子  $\phi(s, t)$  を乗じたものに等しい .

## 7 結晶に非対称性を導入した場合

$\Phi(\lambda, s, t)$  に含まれるパラメータ  $q$  はそのまま残して ,  $Z$  や  $Z(s, t)$  に含まれるシューア関数の特殊値の項を  $s_\lambda(q^\rho)^2 \rightarrow s_\lambda(q_1^\rho)s_\lambda(q_2^\rho)$  ( $0 < q_1 < 1, 0 < q_2 < 1$ ) と置き換える . これは結晶を構成する立方体のボルツマン重みへの寄与を対角断面を境にして変えることを意味する ( 一種の非対称性の導入 ) . こうして得られる分配函数

$$Z(s, t; q_1, q_2) = \sum_{\lambda} s_\lambda(q_1^\rho)s_\lambda(q_2^\rho)Q^{|\lambda|+s(s+1)/2}e^{\Phi(\lambda, s, t)} \quad (24)$$

を考える . (5) の作用素を  $q$  を明示して  $G_{\pm}(q)$  と表せば , この分配函数は

$$Z(s, t; q_1, q_2) = \langle s | G_+(q_1)Q^{L_0}e^{H(t)}G_-(q_2) | s \rangle \quad (25)$$

というフェルミオン表示をもつ ( $H(t)$  にはもとと同じ  $q$  が含まれていることに注意されたい) . 前節で紹介した結果はこの場合に次のように拡張される [5] .

定理 2 ある正整数  $N_1, N_2$  が存在して  $q_1, q_2, q$  が

$$q_1 = q^{1/N_1}, q_2 = q^{1/N_2} \quad (26)$$

という関係にあるとする . このとき  $Z(s, t; q_1, q_2)$  は

$$\begin{aligned} Z(s, t; q_1, q_2) &= \phi(s, t)\tau(T_{N_1k} = (-1)^{N_1k}t_k \ (k = 1, 2, \dots), \text{他の } T_k, \bar{T}_k = 0) \\ &= \phi(s, t)\tau(\bar{T}_{N_2k} = -(-1)^{N_2k}t_k \ (k = 1, 2, \dots), \text{他の } T_k, \bar{T}_k = 0) \end{aligned} \quad (27)$$

と表せる . ここで  $\phi(s, t)$  は

$$\phi(s, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k t_k}{1 - q^k}\right) (q_1 q_2)^{-s(s+1)(2s+1)/12}$$

という函数であり ,  $\tau = \tau(s, T, \bar{T})$  は

$$g = q_1^{W_0/2} G_-(q_1) G_+(q_1) Q^{L_0} G_-(q_2) G_+(q_2) q_2^{W_0/2} \in \text{GL}(\infty) \quad (28)$$

が定める戸田階層の 函数である . この  $g$  は

$$(-1)^{N_1k} J_{N_1k} g = g (-1)^{N_2k} J_{-N_2k} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (29)$$

という条件を満たす . それに呼応して  $\tau(s, T, \bar{T})$  は

$$(-1)^{N_1k} \frac{\partial \tau}{\partial T_{N_1k}} + (-1)^{N_2k} \frac{\partial \tau}{\partial \bar{T}_{N_2k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (30)$$

という条件を満たす .

## 補足

1. 証明の方法は  $q_1 = q_2 = q$  の場合と同様である .
2. (27) に示した 2 つの表示は  $q_1 = q_2 = q$  の場合の (23) に相当する .
3. (29) や (30) を 2 次元戸田階層のラックス作用素  $L, \bar{L}$  に翻訳すると

$$(-L)^{N_1} = (-\bar{L})^{-N_2}$$

となる . これによって定義される簡約されたラックス作用素は

$$\mathcal{L} = (-e^{\partial_s})^{N_1} + b_1 e^{(N_1-1)\partial_s} + \dots + b_{N_1+N_2} (-e^{\partial_s})^{-N_2}$$

となり ,  $N_1 = N_2 = 1$  のときには 1 次元戸田階層のラックス作用素に帰着する .

4. 一般に , (26) を仮定しない場合にも , 分配関数は  $Q, s$  について

$$f(s, q_1 q_2 Q) f(s, Q) - f(s, q_1 Q) f(s, q_2 Q) = (q_1 q_2)^{s+1/2} f(s+1, Q) f(s-1, q_1 q_2 Q)$$

という差分方程式を満たすことがわかる . この差分方程式は梶原・薩摩の 2 次元  $q$  差分戸田方程式の一種の簡約として得られる . 詳しくは原論文 [5] を参照されたい .

## 参考文献

- [1] N. Nekrasov and A. Okounkov, Seiberg-Witten theory and random partitions, in: P. Etingof, V. Retakh and I.M. Singer (eds.), *The unity of mathematics*, Progr. Math. **244**, Birkhäuser, 2006, pp. 525–296.
- [2] T. Maeda, T. Nakatsu, K. Takasaki and T. Tamakoshi, Five-dimensional supersymmetric Yang-Mills theories and random plane partitions, *JHEP* **0503** (2005), paper 056.
- [3] A. Okounkov, N. Reshetikhin and C. Vafa, Quantum Calabi-Yau and classical crystals, in: P. Etingof, V. Retakh and I.M. Singer (eds.), *The unity of mathematics*, Progr. Math. **244**, Birkhäuser, 2006, pp. 597–618.
- [4] T. Nakatsu and K. Takasaki, Melting crystal, quantum torus and Toda hierarchy, *Commun. Math. Phys.* **285** (2009), 445–468.
- [5] K. Takasaki, Integrable structure of melting crystal model with two  $q$ -parameters. *J. Geometry and Physics* **59** (2009), 1244–1257.
- [6] A. Okounkov and N. Reshetikhin, Correlation function of Schur Process with application to local geometry of a random 3-Dimensional young diagram, *J. Amer. Math. Soc.* **16**, (2003), 581–603.