

# 溶解結晶模型の可積分構造

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

2010年3月27日

- T. Nakatsu and K. Takasaki, Melting crystal, quantum torus and Toda hierarchy, Commun. Math. Phys. 285 (2009), 445–468 (arXiv:0710.5339 [hep-th]).
- K. Takasaki, Integrable structure of melting crystal model with two  $q$ -parameters, J. Geom. Phys. 59 (2009), 1244–1257 (arXiv:0903.2607 [math-ph]).

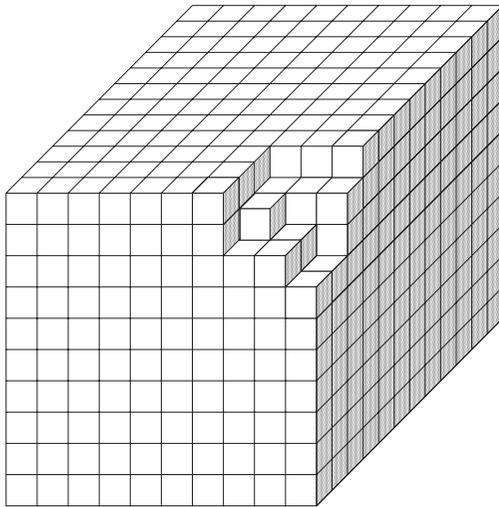
---

♣ 好 ♡ 評 ♣ 連 ♣ 載 ♣ 中 ♣

「線形代数と数え上げ」, 数学セミナー 2010年4月号～

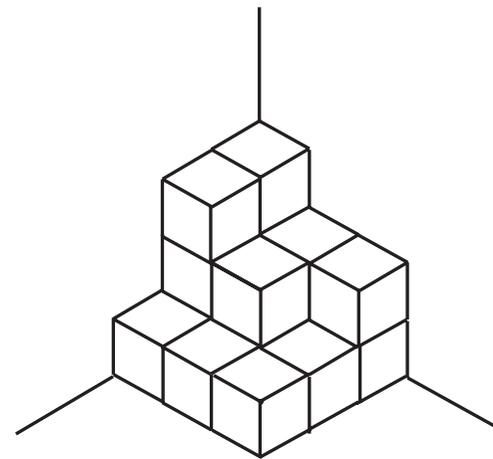
# 1. 溶解結晶模型

## 結晶と3次元ヤング図形



角が溶けた結晶

補集合



3次元ヤング図形

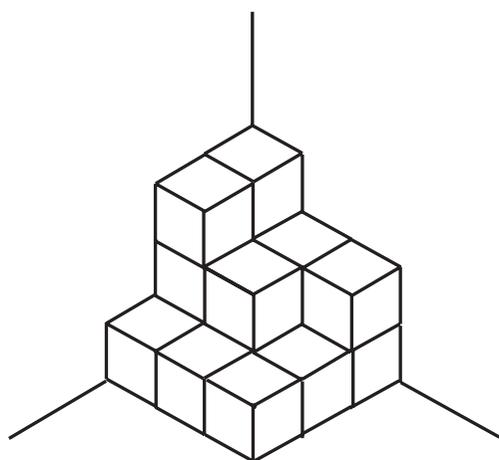
溶解結晶模型は第1象限を占める結晶の角が溶けて熱平衡に達した状態を定式化する．結晶の形は3次元ヤング図形で指定される．

### 3次元ヤング図形と平面分割

3次元ヤング図形は  $xy$  平面の正方形  $[i-1, i] \times [j-1, j]$  の上に積まれた立方体の個数  $\pi_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ) の2次元配列 (平面分割)

$$\pi = (\pi_{ij})_{i,j=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \pi_{ij} \geq \pi_{i+1,j}, \pi_{i,j+1}$$

で表現できる。以後, 3次元ヤング図形と平面分割を同一視する。



$$\pi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(0 が並ぶ部分は省いた)

## ボルツマン重みと分配函数

溶解結晶模型では平面分割  $\pi$  が定める形の結晶（3次元ヤング図形の補集合）のボルツマン重みを  $q^{|\pi|}$  ( $0 < q < 1$ ) と定める． $|\pi|$  は 3次元ヤング図形の体積，すなわち  $|\pi| = \sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{ij}$  である．分配函数

$$Z = \sum_{\pi} q^{|\pi|}$$

はマクマホン函数と呼ばれるものになる：

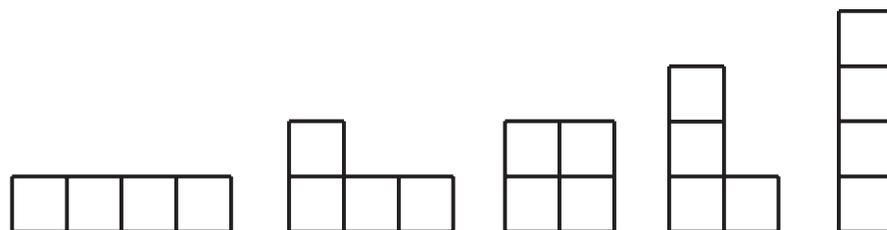
$$Z = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k(1-q^k)^2} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-n}.$$

## 2. シューア函数との関係

### ヤング図形と整数分割

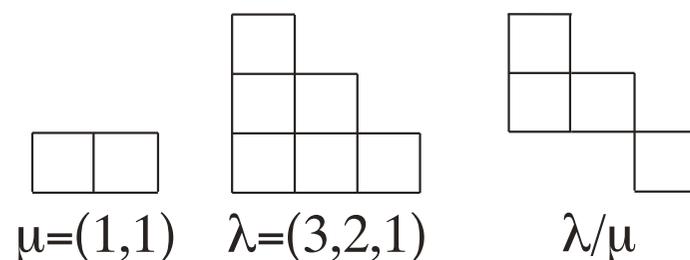
通常のヤング図形には 1 次元的な整数分割  $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ ,  
 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ , が 1 対 1 に対応している . 3 次元ヤング図形の場合にならってヤング図形を平面の第 1 象限に描けば (フランス式の描き方),  $\lambda_i$  は区間  $[i - 1, i]$  の上に積まれた正方形の個数である .

(1, 1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2), (3, 1), (4) に対応するヤング図形



## ヤング図形と整数分割（続き）

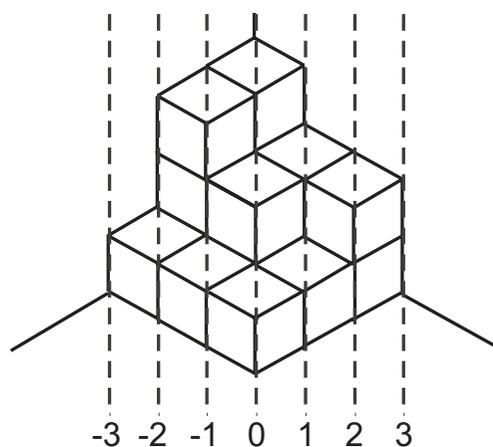
分割  $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$  に対して  $\lambda_i$  の総和（すなわちヤング図形の面積）を  $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$  と表す．さらに，包含関係（ $\lambda \supseteq \mu$  という記号で表す）にあるヤング図形に対してその差集合を  $\lambda/\mu$  という記号で表して**歪ヤング図形**と呼び，その面積を  $|\lambda/\mu|$  と表す（もちろん  $|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu|$  となる）．



### 3次元ヤング図形の対角断面

3次元ヤング図形を  $y - x = m$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) という平面で切った断面を**対角断面**と呼ぶ。3次元ヤング図形を平面分割  $\pi = (\pi_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$  で表せば、対角断面を表す分割  $\pi(m)$  は次のようになる：

$$\pi(m) = \begin{cases} (\pi_{i,i+m})_{i=1}^{\infty} & (m \geq 0 \text{ の場合}) \\ (\pi_{j-m,j})_{j=1}^{\infty} & (m < 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$



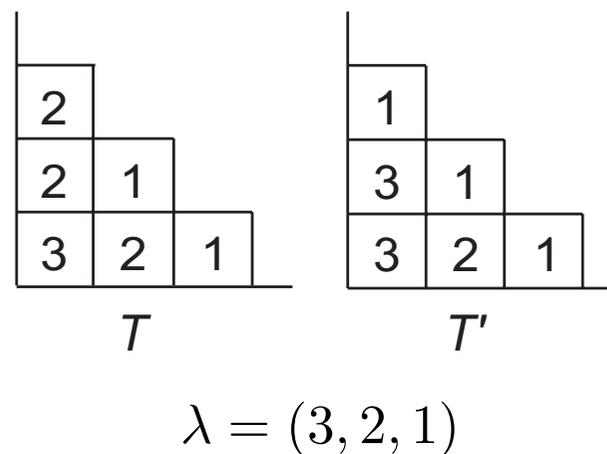
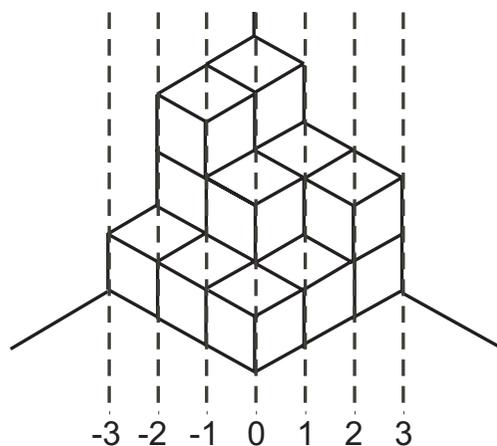
### 主対角断面上の半標準盤

左右の対角断面列  $\{\pi(-m)\}_{m=0}^{\infty}$ ,  $\{\pi(m)\}_{m=0}^{\infty}$  によって主対角断面  $\lambda = \pi(0)$  上に2つの半標準版  $T, T'$  が定まる.

$T$ :  $\pi(-m)/\pi(-m-1)$  ( $m \geq 0$ ) に  $m+1$  を書き込む

$T'$ :  $\pi(m)/\pi(m+1)$  ( $m \geq 0$ ) に  $m+1$  を書き込む

平面分割  $\pi$  はこのようなヤング図形と半標準盤の組  $(\lambda, T, T')$  と1対1に対応する.



半標準盤に関する部分和からシューア函数が現れる

3次元ヤング図形の左半分・右半分の重み

$$q^T = \prod_{m=0}^{\infty} q^{(m+1/2)|\pi(-m)/\pi(-m-1)|}, \quad q^{T'} = \prod_{m=0}^{\infty} q^{(m+1/2)|\pi(m)/\pi(m+1)|}$$

を導入すれば, 分配函数は  $T, T'$  に関する総和を先に行った形

$$Z = \sum_{\lambda} \left( \sum_T q^T \right) \left( \sum_{T'} q^{T'} \right)$$

に書き直せる. **シューア函数の組み合わせ論的定義** (半標準盤に関する総和の公式) によれば, これらの部分和は (無限変数の) シューア函数  $s_{\lambda}(x_1, x_2, \dots)$  を用いて

$$\sum_T q^T = \sum_{T'} q^{T'} = s_{\lambda}(q^{\rho}), \quad q^{\rho} := (q^{1/2}, q^{3/2}, \dots, q^{n+1/2}, \dots)$$

と表せる.

## 分配函数のシューア函数表示

こうして**シューア函数の特殊値**  $s_\lambda(q^\rho)$  による分配函数の展開公式

$$Z = \sum_{\pi} q^{|\pi|} = \sum_{\lambda} s_\lambda(q^\rho)^2$$

が得られる .

---

このままでは (パラメータ  $q$  以外に) 変数が入っていないので, 可積分構造を論じられない. 可積分構造の考察の対象となるのは外部ポテンシャルを導入して変形した分配函数  $Z(s, t)$  (ある離散変数  $s$  とポテンシャルの結合定数  $t = (t_1, t_2, \dots)$  を変数とする) である. 可積分構造を考えるための基礎となるのが分配函数のフェルミオン表示なので, 先にそちらを説明する .

### 3. 分配函数のフェルミオン表示

#### フェルミオン

- 複素フェルミ場とそのフーリエモード

$$\psi(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m z^{-m-1}, \quad \psi^*(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m^* z^{-m},$$

$$\{\psi_m, \psi_n^*\} = \delta_{m+n,0}, \quad \{\psi_m, \psi_n\} = \{\psi_m^*, \psi_n^*\} = 0.$$

- チャージ  $s$  の基底状態 (ディラック海)

$$\langle s| = \langle -\infty| \cdots \psi_{s-2}^* \psi_{s-1}^* \psi_s^*, \quad |s\rangle = \psi_{-s} \psi_{-s+1} \psi_{-s+2} \cdots |-\infty\rangle.$$

- 分割  $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n$  で指定されるチャージ  $s$  の励起状態

$$\langle \lambda; s| = \langle s| \psi_{-s} \cdots \psi_{-(s-n+1)} \psi_{s+\lambda_n-n+1}^* \cdots \psi_{s+\lambda_1}^*,$$

$$|\lambda; s\rangle = \psi_{-(s+\lambda_1)} \cdots \psi_{-(s+\lambda_n-n+1)} \psi_{s-n+1}^* \cdots \psi_s^* |s\rangle.$$

## シューア函数のフェルミオン表示

フェルミ場の**カレント**  $J(z) = :\psi(z)\psi^*(z):$  のフーリエモード

$$J_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} :\psi_{m-n}\psi_n^* : \quad (m \in \mathbf{Z}), \quad [J_m, J_n] = m\delta_{m+n,0},$$

ならびに **KP 階層の時間変数**に相当する変数

$$T_k = \frac{1}{k} \sum_{i \geq 1} x_i^k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(あとで導入する変数  $t_k$  と区別するため大文字にしている) を用いれば, シューア函数を次のように**フェルミオン表示**できる:

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots) = \langle 0 | \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} T_k J_k \right) | \lambda \rangle = \langle \lambda | \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} T_k J_{-k} \right) | 0 \rangle$$

### 溶解結晶模型の分配函数のフェルミオン表示

このフェルミオン表示を用いれば，シューア函数の特殊値  $s_\lambda(q^\rho)$  は

$$s_\lambda(q^\rho) = \langle 0|G_+|\lambda\rangle = \langle \lambda|G_-|0\rangle$$

と表示できる．ここで  $G_\pm$  は

$$G_\pm = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k/2}}{k(1-q^k)} J_{\pm k}\right)$$

という作用素である．これから**分配函数のフェルミオン表示**

$$Z = \sum_{\lambda} \langle 0|G_+|\lambda\rangle \langle \lambda|G_-|0\rangle = \langle 0|G_+G_-|0\rangle$$

が得られる．

注意： $G_\pm$  の乗法的交換子からマクマホン函数が出てくる．

## 4. 外部ポテンシャルの導入

### 外部ポテンシャル

整数変数  $s$  と対角断面  $\lambda = \pi(0)$  に依存する外部ポテンシャルとして

$$\begin{aligned}\Phi_k(\lambda, s) &= \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(s+\lambda_i-i+1)} - \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(-i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (q^{k(s+\lambda_i-i+1)} - q^{k(s-i+1)}) + q^k \frac{1 - q^{sk}}{1 - q^k}\end{aligned}$$

を導入する．ここで1行目はいわば発見的な定義式であり ( $|q| > 1$  でのみ収束する)，それを2行目のように解釈し直す ( $q$  の有理式になる)．

注意：整数列  $s + \lambda_i - i + 1$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) は励起状態  $\langle \lambda; s |, | \lambda; s \rangle$  のマヤ図形において粒子の存在する場所に他ならない．

## 変形された分配函数

結合定数の組  $t = (t_1, t_2, \dots)$  を用意して  $\Phi_k(\lambda, s)$  の線形結合

$$\Phi(\lambda, s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \Phi_k(\lambda, s) \text{ の指数函数 ( } \lambda = \pi(0) \text{ とする ) をボルツ$$

マン重み  $q^{|\pi|}$  に乗じる . さらに , 新たなパラメータ  $Q$  を導入して  $Q^{|\lambda|+s(s+1)/2}$  も乗じる . こうして得られる **変形された分配函数**

$$Z(s, t) = \sum_{\pi} q^{|\pi|} Q^{|\pi(0)|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\pi(0), s, t)}$$

が可積分構造の考察の対象となる .  $\lambda = \pi(0)$  上の半標準盤  $T, T'$  に関する総和を先に行うことによって , この分配函数は

$$Z(s, t) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(q^{\rho})^2 Q^{|\lambda|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\lambda, s, t)}$$

とも書き直せる .

## 変形された分配函数のフェルミオン表示

$$H_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{kn} : \psi_{-n} \psi_n^* :, H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k, L_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n : \psi_{-n} \psi_n^* \text{ と}$$

いう作用素を導入すれば ( $L_0$  はヴィラソロ代数に属する), **変形された分配函数のフェルミオン表示**

$$\begin{aligned} Z(s, t) &= \sum_{\lambda} \langle s | G_+ | \lambda; s \rangle \langle \lambda; s | Q^{L_0} e^{H(t)} | \lambda; s \rangle \langle \lambda; s | G_- | s \rangle \\ &= \langle s | G_+ Q^{L_0} e^{H(t)} G_- | s \rangle \end{aligned}$$

が得られる .

---

これをよく知られた 函数のフェルミオン表示の形に書き直すために,  $H_k, J_m$  を含む作用素のある代数 (量子トーラス代数) の隠れた性質 (シフト対称性) を利用する .

## 5. 量子トーラス代数とシフト対称性

### 代数の基底と交換関係

$$V_m^{(k)} = q^{-km/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{kn} : \psi_{m-n} \psi_n^* : \quad (k, m \in \mathbf{Z}),$$

$$[V_m^{(k)}, V_n^{(l)}] = (q^{(lm-kn)/2} - q^{(kn-lm)/2}) \left( V_{m+n}^{(k+l)} - \delta_{m+n,0} \frac{q^{k+l}}{1 - q^{k+l}} \right).$$

$J_m, H_k$  はこの代数に

$$J_m = V_m^{(0)}, \quad H_k = V_0^{(k)}$$

というように含まれている。

注意：この代数はトーラス上の関数のポアソン代数の量子化をフェルミオンによって実現したものである。右辺の c 数項の分母  $1 - q^{k+l}$  は右辺先頭の  $q^{(lm-kn)/2} - q^{(kn-lm)/2}$  ( $m+n=0$  のとき  $q^{(k+l)m/2} - q^{-(k+l)m/2}$  になる) を割り切る。

## シフト対称性とその帰結

$$\begin{aligned}
G_- G_+ \left( V_m^{(k)} - \delta_{m,0} \frac{q^k}{1 - q^k} \right) (G_- G_+)^{-1} \\
= (-1)^k \left( V_{m+k}^{(k)} - \delta_{m+k,0} \frac{q^k}{1 - q^k} \right).
\end{aligned}$$

この等式 (シフト対称性) を  $m = 0, -k$  の場合に適用すれば,  
 $H_k = V_0^{(k)}$  と  $V_{\pm k}^{(k)}$  を結ぶ等式

$$\begin{aligned}
G_- G_+ \left( H_k - \frac{q^k}{1 - q^k} \right) (G_- G_+)^{-1} &= (-1)^k V_k^{(k)}, \\
(G_- G_+)^{-1} \left( H_k - \frac{q^k}{1 - q^k} \right) G_- G_+ &= (-1)^k V_{-k}^{(k)}
\end{aligned}$$

が得られる.

## シフト対称性とその帰結 ( 続き )

さらに  $W_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 : \psi_{-n} \psi_n^* :$  という作用素 (いわゆる  $W^{(3)}$  代数に属する) を用いれば,  $V_{\pm k}^{(k)}$  と  $V_{\pm}^{(0)} = J_{\pm k}$  を結ぶ等式

$$q^{W_0/2} V_k^{(k)} q^{-W_0/2} = J_k, \quad q^{-W_0/2} V_{-k}^{(k)} q^{W_0/2} = J_{-k},$$

が得られる .

こうして最終的に次のような  $H_k$  と  $J_{\pm k}$  を結ぶ等式が得られる :

$$G_- G_+ \left( H_k - \frac{q^k}{1 - q^k} \right) (G_- G_+)^{-1} = (-1)^k q^{-W_0/2} J_k q^{W_0/2},$$

$$(G_- G_+)^{-1} \left( H_k - \frac{q^k}{1 - q^k} \right) G_- G_+ = (-1)^k q^{W_0/2} J_{-k} q^{-W_0/2}.$$

## 6. 1次元戸田階層の特殊解としての解釈

分配関数を書き直す

$\langle s | G_+ Q^{L_0} e^{H(t)} G_- | s \rangle$  に現れる作用素  $G_+ Q^{L_0} e^{H(t)} G_-$  を

$$G_+ Q^{L_0} e^{H(t)} G_- = G_+ e^{H(t)/2} G_+^{-1} \cdot G_+ Q^{L_0} G_- \cdot G_-^{-1} e^{H(t)/2} G_-$$

というように作用素の積の形に分ける． $G_+ e^{H(t)/2} G_+^{-1}$  と  $G_-^{-1} e^{H(t)/2} G_-$  に対して前述の  $H_k$  と  $J_{\pm k}$  を結ぶ等式を少し書き直したものの

$$G_+ \left( H_k - \frac{q^k}{1 - q^k} \right) G_+^{-1} = (-1)^k G_-^{-1} q^{-W_0/2} J_k q^{W_0/2} G_-,$$

$$G_-^{-1} \left( H_k - \frac{q^k}{1 - q^k} \right) G_- = (-1)^k G_+ q^{W_0/2} J_{-k} q^{-W_0/2} G_+^{-1}$$

を適用すれば（次ページに続く）

## 分配関数を書き直す ( 続き )

$$G_+ e^{H(t)/2} G_+^{-1} = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k q^k}{2(1-q^k)} \right) \\ \times G_-^{-1} q^{-W_0/2} \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t_k}{2} J_k \right) q^{W_0/2} G_-,$$

$$G_-^{-1} e^{H(t)/2} G_- = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k q^k}{2(1-q^k)} \right) \\ \times G_+ q^{W_0/2} \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t_k}{2} J_{-k} \right) q^{-W_0/2} G_+^{-1}$$

となる .

## 分配関数を書き直す（続き）

これらを  $\langle s|G_+Q^{L_0}e^{H(t)}G_-|s\rangle$  に代入して

$$\begin{aligned}\langle s|G_-^{-1}q^{-W_0/2} &= q^{-s(s+1)(2s+1)/12}\langle s|, \\ q^{-W_0/2}G_+^{-1}|s\rangle &= q^{-s(s+1)(2s+1)/12}|s\rangle\end{aligned}$$

という等式に注意すれば， $Z(s, t)$  は最終的に

$$Z(s, t) = \phi(s, t)\langle s|\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k t_k}{2}J_k\right)g\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k t_k}{2}J_{-k}\right)|s\rangle,$$

と書き直せる．ここで

$$\begin{aligned}g &= q^{W_0/2}G_-G_+Q^{L_0}G_-G_+q^{W_0/2}, \\ \phi(s, t) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_k q^k}{1 - q^k}\right)q^{-s(s+1)(2s+1)/6}.\end{aligned}$$

## 戸田階層の 函数としての解釈

$Z(s, t)$  の  $\langle s | \cdots | s \rangle$  の部分は  $g = q^{W_0/2} G_- G_+ Q^{L_0} G_- G_+ q^{W_0/2}$  の定める **2次元戸田階層の 函数**

$$\tau(s, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}) = \langle s | \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} T_k J_k \right) g \exp \left( - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{T}_k J_{-k} \right) | s \rangle$$

の変数を  $T_k = (-1)^k t_k / 2$ ,  $\bar{T}_k = -(-1)^k t_k / 2$  に特殊化したものである．さらに  $H_k$  と  $J_{\pm k}$  を結ぶ関係式からの帰結として  $g$  は

$$J_k g = g J_{-k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

という等式を満たすので，この 函数は **1次元戸田階層への簡約条件**

$$\frac{\partial \tau}{\partial T_k} + \frac{\partial \tau}{\partial \bar{T}_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

を満たす．

## 戸田階層の 函数としての解釈 ( 続き )

$g$  の満たす等式  $J_k g = g J_{-k}$  によって  $g$  の左右の  $J_{\pm k}$  は一方から他方へ自由に移動できる . その結果として  $Z(s, t)$  の  $\langle s | \cdots | s \rangle$  の部分は

$$\langle s | \cdots | s \rangle = \langle s | \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k t_k J_k \right) g | s \rangle = \langle s | g \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k t_k J_{-k} \right) | s \rangle$$

というように書き直すこともできる .

以上のことをまとめると次の結論が得られる (T. Nakatsu and K. Takasaki, Commun. Math. Phys. 285 (2009), 445–468) .

**【定理】**  $Z(s, t)$  は 1次元戸田階層の特殊解の 函数に簡単な因子  $\phi(s, t)$  を乗じたものに等しい .

## 7. 結晶に非対称性を導入した場合

### ボルツマン重みの修正

$\Phi_k(\lambda, s)$  に含まれるパラメータ  $q$  はそのまま残して、新たにパラメータ  $q_1, q_2$  ( $0 < q_1 < 1, 0 < q_2 < 1$ ) を導入し、 $Z$  や  $Z(s, t)$  に含まれる項  $s_\lambda(q^\rho)^2$  を

$$s_\lambda(q^\rho)^2 \longrightarrow s_\lambda(q_1^\rho) s_\lambda(q_2^\rho)$$

と置き換える。2個の  $s_\lambda(q^\rho)$  は対角断面の左側部分と右側部分の寄与をまとめたものであり、この修正は結晶を構成する単位立方体の重みを対角断面の左右で  $q$  から  $q_1, q_2$  に変えることを意味する（一種の非対称性の導入）。

## 修正された分配函数

## 修正された分配函数

$$Z(s, t; q_1, q_2) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(q_1^{\rho}) s_{\lambda}(q_2^{\rho}) Q^{|\lambda| + s(s+1)/2} e^{\Phi(\lambda, s, t)}$$

はフェルミオン表示

$$Z(s, t; q_1, q_2) = \langle s | G_+(q_1) Q^{L_0} e^{H(t)} G_-(q_2) | s \rangle$$

をもつ．ここで  $G_+(q_1), G_-(q_2)$  は  $G_{\pm}$  に含まれる  $q$  を  $q_1, q_2$  に置き換えたもの

$$G_+(q_1) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1^{k/2}}{k(1 - q_1^k)} J_k \right), \quad G_-(q_2) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_2^{k/2}}{k(1 - q_2^k)} J_{-k} \right)$$

である．

## 戸田階層の 函数としての解釈

$q_1, q_2$  が  $q$  のべき乗根になる場合には, すでに説明した 1 次元戸田階層との関係が次のように一般化される (K. Takasaki, J. Geom. Phys. 59 (2009), 1244–1257) .

**【定理】**  $q_1 = q^{1/N_1}, q_2 = q^{1/N_2}$  ( $N_1, N_2$  は正整数) と仮定する .

(i)  $Z(s, \mathbf{t}; q_1, q_2)$  は

$$\begin{aligned} Z(s, \mathbf{t}; q_1, q_2) &= \phi(s, \mathbf{t}) \tau(T_{N_1 k} = (-1)^{N_1 k} t_k \ (k = 1, 2, \dots), \text{他の } T_k, \bar{T}_k = 0) \\ &= \phi(s, \mathbf{t}) \tau(\bar{T}_{N_2 k} = -(-1)^{N_2 k} t_k \ (k = 1, 2, \dots), \text{他の } T_k, \bar{T}_k = 0) \end{aligned}$$

と表せる . ここで  $\tau = \tau(s, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}})$  は

$$g = q_1^{W_0/2} G_-(q_1) G_+(q_1) Q^{L_0} G_-(q_2) G_+(q_2) q_2^{W_0/2}$$

が定める 2 次元戸田階層の 函数であり (次ページに続く) ,

## 戸田階層の 函数としての解釈 ( 続き )

$\phi(s, t)$  は  $\phi(s, t) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k t_k}{1 - q^k} \right) (q_1 q_2)^{-s(s+1)(2s+1)/12}$  という

函数である .

(ii)  $g$  に対して

$$(-1)^{N_1 k} J_{N_1 k} g = g (-1)^{N_2 k} J_{-N_2 k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

という等式が成立する .

(iii)  $\tau(s, T, \bar{T})$  は

$$(-1)^{N_1 k} \frac{\partial \tau}{\partial T_{N_1 k}} + (-1)^{N_2 k} \frac{\partial \tau}{\partial \bar{T}_{N_2 k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

という条件を満たす .

注意 : 最後の条件は 2 次元戸田階層のラックス作用素  $L, \bar{L}$  に  $(-L)^{N_1} = (-\bar{L})^{-N_2}$  という簡約条件をおくことに相当する .

## パラメータ $Q$ の意義

これまでパラメータとして固定してきた  $Q$  を新たに変数とみなすとき, 分配関数  $Z(s, t; q_1, q_2)$  は ( $q_1, q_2, q$  が全く独立であっても)  $Q$  と  $s$  について

$$\begin{aligned} f(s, q_1 q_2 Q) f(s, Q) - f(s, q_1 Q) f(s, q_2 Q) \\ = (q_1 q_2)^{s+1/2} f(s+1, Q) f(s-1, q_1 q_2 Q) \end{aligned}$$

という差分方程式を満たすことがわかる (K. Takasaki, 上掲論文). この差分方程式は梶原・薩摩の 2 次元  $q$  差分戸田方程式の次元簡約として得られる. この方程式の意義はまだよくわからないが, リーマン球面  $CP^1$  のグロモフ・ウィッテン不変量の母関数が 1 次元戸田方程式を満たすという事実と関係がありそうに思われる.