フルヴィッツ数に関連する戸田階層の特殊解とその古典極限

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

フルヴィッツ（Hurwitz）数は閉リーマン面の有限被覆の位相的同型類の数え上げによって得られる数であり，対称群の表現論を用いて純代数的に記述できる．近年，代数幾何学や弦理論においてフルヴィッツ数に対する関心が高まっているが，Bouchard と Mariño [1] は球面のフルヴィッツ数とその q 類似を考察し，Eynard と Orantin によるランダム行列の位相的展開の一般化[2] を手がかりにして，それらの数の母函数（ランダム行列におけるループ相関関数に相当する）が一連の漸化式を満たすことを予想した．この予想は後に Eynard, Mulase, Safnuk [3] および Zhou [4] によって解決された．

Eynard と Orantin の位相的展開の基本的データは「スペクトル曲線」と呼ばれる曲線であり，展開の各項はこの曲線が定める漸化式に従う．Bouchard と Mariño は

- $x = ye^{-y}$ （フルヴィッツ数の場合）
- $x = y(1-y/f)^f$ （q 類似の場合）（f は正整数パラメータ）

という方程式（前者は Lambert の W 函数と関係があり，後者は $f \to \infty$ において前者に帰着する）で定義される曲線をスペクトル曲線として用いた．この講演ではフルビッツ数の母函数とその q 類似（ランダム行列の分配函数に相当する）を特殊値として与えるような戸田階層の τ 函数を考察し，ラックス作用素とオルロフ–シュルマン作用素に対して「一般化弦方程式」を導く．さらにこの一般化弦方程式の古典極限（無分散極限）の解から上記の曲線の方程式と同じ形のものが現れることを指摘する．

τ 函数を書き下すために反交換関係

$$\psi_i\psi_j^* + \psi_j^*\psi_i = \delta_{ij}, \quad \psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i = 0, \quad \psi_i^*\psi_j^* + \psi_j^*\psi_i^* = 0$$

を満たすフェルミオンの生成消滅演算子 ψ_i, ψ_i^* （$i \in \mathbf{Z}$）とチャージ s（$s \in \mathbf{Z}$）の基底状態（ディラック海）

$$\langle s| = \langle -\infty| \cdots \psi_{s-2}^*\psi_{s-1}^*, \quad |s\rangle = \psi_{s-1}\psi_{s-2}\cdots|-\infty\rangle$$

を導入する．問題の τ 函数は（少し一般化された形で）

$$\tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) = \langle s| \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k\right) e^{-\beta W_0/2} Q^{L_0} \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k J_{-k}\right)|s\rangle$$

と表せる．ここで J_k, L_0, W_0 はそれぞれ

$$J_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {:}\psi_{n-k}\psi_n^*{:}, \quad L_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n{:}\psi_n\psi_n^*{:}, \quad W_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2{:}\psi_n\psi_n^*{:}$$

[1] V. Bouchard and M. Mariño, arXiv:0906.1206
[2] B. Eynard and N. Orantin, Comm. Number Theory Phys. **1** (2007), 347, arXiv:math-ph/0702045
[3] B. Eynard, M. Mulase and B. Safnuk, arXiv:0907.5224
[4] J. Zhou, arXiv:0911.2343

と定義される演算子であり，β, Q は定数（$\beta > 0$）である．

$\tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})$ の定義に現れた $\mathrm{GL}(\infty)$ の要素 $g = e^{-\beta W_0/2} Q^{L_0}$ は $k = 1, 2, \cdots$ にわたって

$$J_k g = g Q^k e^{\beta k^2/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\beta k n} {:}\psi_{n-k}\psi_n^*{:}, \quad g J_{-k} = Q^k e^{-\beta k^2/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\beta k n} {:}\psi_{n+k}\psi_n^*{:} g \quad (1)$$

という代数的関係式を満たす．これらは戸田階層の解に対する拘束条件を与える．この拘束条件をラックス作用素とオルロフ–シュルマン作用素

$$L = e^{\partial_s} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{(-n+1)\partial_s}, \quad \bar{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_n e^{(n+1)\partial_s},$$

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} n t_n L^n + s + \sum_{n=1}^{\infty} v_n L^{-n}, \quad \bar{M} = -\sum_{n=1}^{\infty} n \bar{t}_n \bar{L}^{-n} + s + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \bar{L}^n$$

に翻訳すれば，次のような一般化弦方程式が得られる．

定理　$L, M, \bar{L}, \bar{M}$ は一般化弦方程式

$$L^k = Q^k e^{\beta k^2/2} \bar{L}^k e^{-\beta k \bar{M}}, \quad \bar{L}^{-k} = Q^k e^{-\beta k^2/2} L^{-k} e^{-\beta k M} \quad (2)$$

を満たす（実際には，これらの方程式は $k = 1$ の方程式から従う）．

この一般化弦方程式の古典極限を考えるために，一般的処方箋に従ってパラメータ $\hbar$（弦理論では弦の結合定数に相当する）を導入し，$\beta, s, t_n, \bar{t}_n$ を $\beta \to \beta\hbar$, $s \to \hbar^{-1}s$, $t_n \to \hbar^{-1}t_n$, $\bar{t}_n \to \hbar^{-1}\bar{t}_n$ とリスケールした τ 函数 $\tau_\hbar(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})$ が

$$\log \tau_\hbar(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) = \hbar^{-2} F(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) + O(\hbar^{-1}) \quad (\hbar \to 0)$$

と振る舞うことを仮定する（これは τ 函数をランダム分割模型の分配函数とみなして熱力学極限を考えることにより正当化される）．このときラックス形式のシフト演算子 e^{∂_s} は $e^{\hbar\partial_s}$ に変わり，$\hbar \to 0$ の極限において可換な変数 P（s の共役運動量の指数函数）に置き換えられる．ラックス作用素とオルロフ–シュルマン作用素は P のローラン級数に置き換えられて無分散戸田階層の解となり，拘束条件として一般化弦方程式

$$L = Q\bar{L}e^{-\beta\bar{M}}, \quad \bar{L}^{-1} = QL^{-1}e^{-\beta M} \quad (3)$$

を満たす．時間変数 $\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}$ を以下のように特殊化すること（これは前述の τ 函数からフルヴィッツ数の母函数とその q 類似を導く際の特殊化に相当している）によって，Bouchard と Mariño の曲線の方程式らしきものが現れる．

- $t_k = t_1\delta_{k1}$, $\bar{t}_k = 0$ の場合の解の表示は

$$L = P, \quad \bar{L} = Q^{-1}e^{\beta s}Pe^{\beta t_1 P}, \quad M = \bar{M} = t_1 P + s. \quad (4)$$

  となる．t_1 を $t_1 = -1/\beta$ と選べば，$\bar{L}$ の定義式は $x \sim \bar{L}$, $y \sim P$ という解釈によって $x = ye^{-y}$ という方程式に見える．

- $t_k = -1/k^2\beta^k$, $\bar{t}_k = 0$　の場合の解の表示は

$$L = P, \quad \bar{L} = Q^{-1}e^{\beta s}P(1 - P/\beta)^{\beta}, \quad M = \bar{M} = \log(1 - P/\beta) + s. \quad (5)$$

  となる．$\beta \sim f$ と解釈すれば，$\bar{L}$ の定義式は $x \sim \bar{L}$, $y \sim P$ という解釈によって $x = y(1 - y/f)^f$ という方程式に見える．