フルヴィッツ数に関連する戸田階層の特殊解とその古典極限

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

2010 年 9 月 24 日

1. リーマン球面のフルヴィッツ数
2. τ 函数のフェルミオン表示
3. 一般化弦方程式
4. 古典極限における解の記述（未完）

1. リーマン球面のフルヴィッツ数

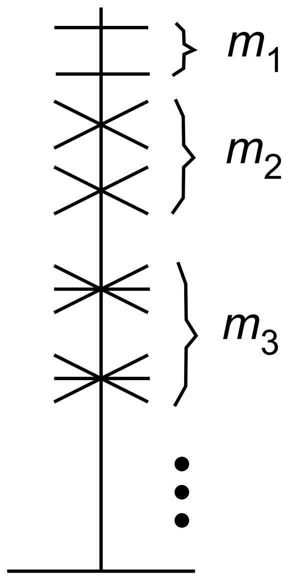
フルヴィッツ数はリーマン面の有限次分岐被覆の位相的同値類をある重みで数え上げたものである．以下では球面の場合を考える．

分岐の状況を分割で表す

点 $P \in \mathbf{CP}^1$ のファイバー $\pi^{-1}(P)$ の近傍では，被覆面 Γ はいくつかの巡回被覆面（$z = a$ における $(z-a)^{1/m}$ のリーマン面と位相的に同じ）に分かれる．各巡回被覆面の次数を降順に $\mu_1, \mu_2, \cdots$ と表せば，被覆次数 d の分割

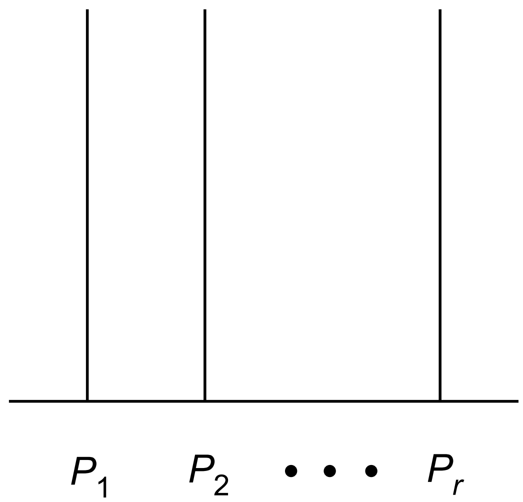
$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots) = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots)$$

が定まる．



フルヴィッツ数

正整数 d と d の分割 $\mu^{(1)},\cdots,\mu^{(r)}$ ならびに球面上の r 個の点 $P_1,\cdots,P_r$ が与えられたとする．これらの点の上方でそれぞれ $\mu^{(1)},\cdots,\mu^{(r)}$ という形に分岐した d 次被覆 $\pi:\Gamma\to\mathbf{CP}^1$ を考える．



このような被覆の位相的同値類 $[\pi]$ は有限個に限られる．被覆変換群 $\mathrm{Aut}(\pi)$ の位数の逆数を重みとしてこれらを数え上げたもの

$$H_d(\mu^{(1)},\cdots,\mu^{(r)})=\sum_{[\pi]}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(\pi)|}$$

をフルヴィッツ数という．

表現論的公式（Burnside）

$$H_d(\mu^{(1)}, \cdots, \mu^{(r)}) = \sum_{|\lambda|=d} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^2 \prod_{k=1}^{r} f_\lambda(\mu^{(k)}),$$

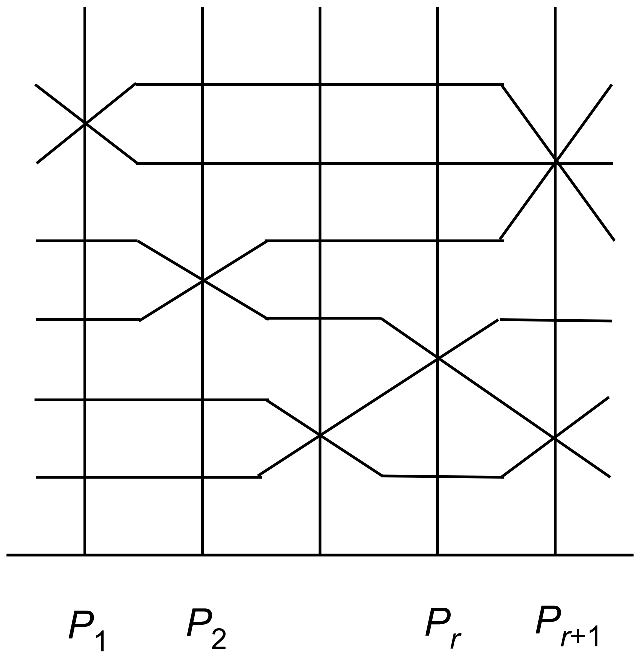
$$\dim \lambda = \chi_\lambda(C(1^d)), \quad f_\lambda(\mu) = \frac{\chi_\lambda(C(\mu))}{\dim \lambda} |C(\mu)|$$

ここで χ_λ は d の分割 λ で決まる d 次対称群の既約表現指標（類関数とみなす），$C(\mu)$ は $\mu = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots)$ 型の共役類，$|C(\mu)|$ はその S_d の部分集合としての要素数である．

$$|C(\mu)| = d!/z_\mu, \quad z_\mu = \prod_{i \geq 1} m_i! i^{m_i}$$

概単純（almost simple）フルヴィッツ数の母函数

$$H_d(\underbrace{1^{d-2}2, \cdots, 1^{d-2}2}_{r}, \mu)$$



パラメータ β, Q と変数の組 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots)$ を用意して，そのべき和 $p_k = \sum_{i\geq 1} x_i^k$ の積 $p_\mu = p_{\mu_1} p_{\mu_2} \cdots$ による母函数 $Z(\boldsymbol{x})$ をつくることができる：

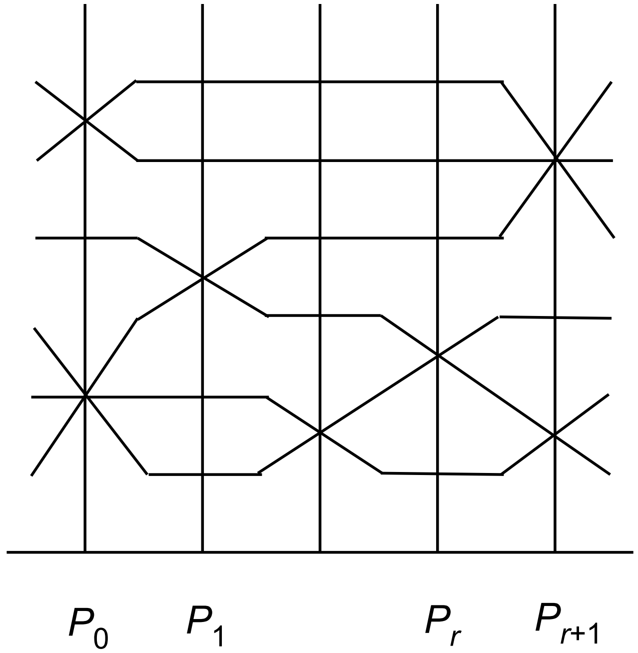
$$Z(\boldsymbol{x}) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{|\mu|=d} H_d(\underbrace{1^{d-2}2, \cdots, 1^{d-2}2}_{r}, \mu) \frac{(-\beta)^r}{r!} Q^d p_\mu$$

これは $t_k = p_k/k$（$k = 1, 2, \cdots$）について KP 階層の τ 函数になる．

（Okounkov？… Kazarian & Lando）

２重（double）フルヴィッツ数の母函数

$$H_d(\mu, \underbrace{1^{d-2}2, \cdots, 1^{d-2}2}_{r}, \bar{\mu})$$



パラメータ β, Q と変数の組 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots)$, $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots)$ を用意して，べき和 $p_k = \sum_{i\geq 1} x_i^k$, $\bar{p}_k = \sum_{i\geq 1} \bar{x}_i^k$ の積による母函数 $Z(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})$ をつくることができる：

$$Z(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{|\mu|=|\bar{\mu}|=d} H_d(\mu, \underbrace{1^{d-2}2, \cdots, 1^{d-2}2}_{r}, \bar{\mu}) \frac{(-\beta)^r}{r!} Q^d p_\mu \bar{p}_{\bar{\mu}}$$

これは $t_k = p_k/k$, $\bar{t}_k = -\bar{p}_k/k$ （$k = 1, 2, \cdots$）について戸田階層のτ函数（の格子座標 $s = 0$ での値）になる．（Okounkov）

シューア函数による母函数の表示

フロベニウスの公式 $\displaystyle\sum_{|\mu|=d}\frac{\chi_\lambda(C(\mu))}{z_\mu}p_\mu = s_\lambda(\boldsymbol{x})$ を用いて書き直す：

- 概単純フルヴィッツ数の場合

$$Z(\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda \frac{\dim\lambda}{|\lambda|!}e^{-\beta\kappa_\lambda}Q^{|\lambda|}s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda s_\lambda[1,0,\cdots]e^{-\beta\kappa_\lambda}Q^{|\lambda|}s_\lambda[\boldsymbol{t}]$$

- ２重フルヴィッツ数の場合

$$Z(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_\lambda e^{-\beta\kappa_\lambda}Q^{|\lambda|}s_\lambda(\boldsymbol{x})s_\lambda(\bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_\lambda e^{-\beta\kappa_\lambda}Q^{|\lambda|}s_\lambda[\boldsymbol{t}]s_\lambda[-\bar{\boldsymbol{t}}]$$

ここで

$$\kappa_\lambda = \sum_{i\geq 1}\lambda_i(\lambda_i - 2i + 1) = \sum_{i\geq 1}\left(\left(\lambda_i - i + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(-i + \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

2. τ 函数のフェルミオン表示

フェルミオン

- 生成消滅演算子 ψ_i, ψ_i^* （$i \in \mathbf{Z}$）

$$\psi_i \psi_j^* + \psi_j^* \psi_i = \delta_{ij}, \quad \psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i = 0, \quad \psi_i^* \psi_j^* + \psi_j^* \psi_i^* = 0$$

- チャージ s （$s \in \mathbf{Z}$）の基底状態（ディラック海）

$$\langle s| = \langle -\infty| \cdots \psi_{s-2}^* \psi_{s-1}^*, \quad |s\rangle = \psi_{s-1} \psi_{s-2} \cdots | -\infty\rangle$$

- τ 函数を書き下すために用いる演算子

$$J_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {:}\psi_{n-k} \psi_n^*{:}, \quad L_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n{:}\psi_n \psi_n^*{:}, \quad W_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2{:}\psi_n \psi_n^*{:}$$

フルヴィッツ数の母函数に帰着する τ 函数

$\mathrm{GL}(\infty)$ の要素 $g = e^{-\beta W_0/2} Q^{L_0}$ の定める戸田階層の τ 函数

$$\tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) = \langle s| \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k\right) e^{-\beta W_0/2} Q^{L_0} \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k J_{-k}\right) |s\rangle$$

は任意の長さの分割 λ でラベル付けされたチャージ s の励起状態の正規直交系 $|\lambda, s\rangle, \langle\lambda, s|$ で展開すれば

$$\tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) = e^{-\beta s(s-1)(2s-1)/12} Q^{s(s-1)/2} \times \sum_{\lambda} e^{-\beta\kappa_\lambda/2} (e^{-\beta(2s-1)/2} Q)^{|\lambda|} s_\lambda[\boldsymbol{t}] s_\lambda[-\bar{\boldsymbol{t}}]$$

となる（Q を適当に定義し直せば $s = 0$ において 2 重フルヴィッツ数の母函数に帰着する）．

3. 一般化弦方程式

フェルミオンの作用素の関係式

$g = e^{-\beta W_0/2} Q^{L_0}$ は $k = 1, 2, \cdots$ にわたって

$$J_k g = g Q^k e^{\beta k^2/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\beta k n} {:}\psi_{n-k}\psi_n^*{:},$$

$$g J_{-k} = Q^k e^{-\beta k^2/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\beta k n} {:}\psi_{n+k}\psi_n^*{:} g$$

という代数的関係式を満たす．この関係式からラックス／オルロフ–シュルマン作用素に対する一般化弦方程式が読み取れる．

ラックス作用素とオルロフ–シュルマン作用素

$$L = e^{\partial_s} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{(-n+1)\partial_s}, \quad \bar{L}^{-1} = \bar{u}_0 e^{-\partial_s} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n e^{(n-1)\partial_s},$$

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} n t_n L^n + s + \sum_{n=1}^{\infty} v_n L^{-n}, \quad \bar{M} = -\sum_{n=1}^{\infty} n \bar{t}_n \bar{L}^{-n} + s + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \bar{L}^n$$

- ラックス方程式系

$$\frac{\partial L}{\partial t_k} = [B_k, L], \quad \frac{\partial L}{\partial \bar{t}_k} = [\bar{B}_k, L], \quad k = 1, 2, \cdots$$

ならびに L を $M, \bar{L}, \bar{M}$ に置き換えた方程式

- （ひねられた）正準交換関係

$$[L, M] = L, \quad [\bar{L}, \bar{M}] = \bar{L}$$

定理（一般化弦方程式）

- $k=1,2,\cdots$ にわたって一般化弦方程式

$$L^k = Q^k e^{\beta k^2/2} \bar{L}^k e^{-\beta k \bar{M}}, \quad \bar{L}^{-k} = Q^k e^{-\beta k^2/2} L^{-k} e^{-\beta k M}$$

が成立する.

- これらの方程式は $k=1$ の場合の方程式

$$L = Q e^{\beta/2} \bar{L} e^{-\beta \bar{M}}, \quad \bar{L}^{-1} = Q e^{-\beta/2} L^{-1} e^{-\beta M}$$

に帰着する.

4. 古典極限における解の記述

戸田階層の古典極限＝無分散戸田階層

- 新たなパラメータ $\hbar$ を導入して，Q はそのままでパラメータ β を $\beta \to \beta\hbar$ と置き換える．$\hbar$ を弦の結合定数とみなせば，これは弦理論においてフルヴィッツ数とその「q 変形」を扱う際のパラメータの設定の仕方と同じである．

- このとき同時に $s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}$ も $s \to \hbar^{-1}s$，$t_k \to \hbar^{-1}t_k, \bar{t}_k \to \hbar^{-1}\bar{t}_k$ と置き換えれば，$\hbar \to 0$ の極限で戸田階層は無分散戸田階層に移行する．

$$e^{\partial_s},\ s\ ([e^{\partial_s}, s] = e^{\partial_s}) \to P,\ s\ (\{P, s\} = P)$$

差分作用素 $L, M, \bar{L}, \bar{M} \to P$ のローラン級数 $L, M, \bar{L}, \bar{M}$

$$\frac{\partial L}{\partial t_k} = [B_k, L],\ \text{etc.} \to \frac{\partial L}{\partial t_k} = \{B_j, L\},\ \text{etc.}$$

一般化弦方程式の古典極限

• この古典極限において，前述の一般化弦方程式は無分散戸田階層の一般化弦方程式

$$L = Q\bar{L}e^{-\beta\bar{M}}, \quad \bar{L}^{-1} = QL^{-1}e^{-\beta M}$$

に変わる．これは非線形リーマン–ヒルベルト問題とみなせる．

• $\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}$ が特別な値をとる場合にはこの方程式の解を具体的に表示できる（後述）．そこには次のような曲線の方程式が現れる．これらは Eynard & Orantin のランダム行列的な方法（Mariño らによって「B 模型再構築」に応用された）のスペクトル曲線と同じ形をしている．

1) 「ランベルト曲線」の方程式 $x = ye^{-y}$．ランベルトのW函数 $W(x)$ によって $y = -W(-x)$ と解ける．

2) その「q 変形」$x = y(1 - y/\beta)^{\beta}$．$\beta \to \infty$ の極限で 1) の曲線に戻る．

$\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}$ の特殊化における解の表示

1) $t_k = t_1\delta_{k1},\ \bar{t}_k = 0$ の場合：

$$L = P, \quad \bar{L} = Q^{-1}e^{\beta s}Pe^{\beta t_1 P}, \quad M = \bar{M} = t_1 P + s.$$

t_1 を $t_1 = -1/\beta$ と選べば，$\bar{L}$ の定義式は $x \sim \bar{L},\ y \sim L = P$ という解釈によって $x = ye^{-y}$ に見える．

2) $t_k = -1/k^2\beta^k,\ \bar{t}_k = 0$ の場合：

$$L = P, \quad \bar{L} = Q^{-1}e^{\beta s}P(1 - P/\beta)^{\beta}, \quad M = \bar{M} = \log(1 - P/\beta) + s.$$

$\bar{L}$ の定義式は $x \sim \bar{L},\ y \sim L = P$ という解釈によって
$x = y(1 - y/\beta)^{\beta}$ に見える．

問　これは Eynard & Orantin の意味のスペクトル曲線と同定できるか？

課題

• 上の解を $\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$ まで延長できないか？特に，$\bar{\boldsymbol{t}}$ について摂動論的に解を構成できないか？

もとのフルヴィッツ数の母函数で $\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$ とすれば，$\lambda = \emptyset$ 以外の項が消えて自明なものになる．他方，古典極限に移行するときには τ 函数を $\hbar$ で $\tau_\hbar(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) = \tau(\beta\hbar, Q, \hbar^{-1}s, \hbar^{-1}\boldsymbol{t}, \hbar^{-1}\bar{\boldsymbol{t}})$ とリスケールして

$$\log \tau_\hbar(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) \sim \hbar^{-2} F(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) + O(\hbar^{-1}) \quad (\hbar \to 0)$$

という漸近展開で無分散戸田階層の τ 函数 $F(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})$ を取り出す．古典極限はこのように非自明な操作を経ているので，$\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$ 直上でもフルヴィッツ数のデータをある程度取り出していると思われる．しかし $\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$ での解の表示だけでは話としてやはり不完全である．

• $\hbar \to 0$ における準古典展開の次の項や高次の項を求められないか？（Eynard & Orantin への可積分系からのアプローチ）