溶解結晶模型と Ablowitz-Ladik 階層

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

以下では q, Q は母函数を考えるための形式的変数（あるは絶対値が 1 より小さい数）とする．3 次元ヤング図形（平面分割）の重み付き数え上げに由来する溶解結晶模型の分配函数は無限変数 $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\geq 1}$ のシューア函数 $s_\lambda(\boldsymbol{x})$ の特殊値を用いて

$$Z = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho})^2 Q^{|\lambda|}, \quad q^{-\rho} = (q^{1/2}, q^{3/2}, \ldots, q^{i-1/2}, \ldots), \tag{1}$$

という総和に書き直せる．ここで $\mathcal{P}$ は長さ無制限の分割全体の集合である．以前の研究[1]では，この分配函数を離散変数 $s \in \mathbf{Z}$ と連続変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$ によって変形したもの $Z(s, \boldsymbol{t})$ が 1 次元戸田階層の τ 函数と関係することを明らかにした．今回はこの Z を

$$Z' = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho}) s_{{}^{\mathrm{t}}\lambda}(q^{-\rho}) Q^{|\lambda|} \quad \text{（${}^{\mathrm{t}}\lambda$ は λ の共役を表す）} \tag{2}$$

に置き換えたものに対して離散変数 s と 2 系列の連続変数 $\boldsymbol{t}$ と $\hat{\boldsymbol{t}} = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, \ldots)$ による変形 $Z'(s, \boldsymbol{t}, \hat{\boldsymbol{t}})$ を導入し，それが Ablowitz-Ladik 階層（あるいは 2 次元戸田階層の簡約として得られる Ruijsenarrs-戸田階層）と関係することを報告する．これは Brini が Dubrovin-Zhang 理論に基づいて主張したこと[2] のより完全な説明を与える．

以前の研究（脚注 1）と同様に，複素自由フェルミ場 $\psi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \psi_n z^{-n-1}$, $\psi^*(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \psi_n^* z^{-n}$ のフーリエモードとそのフォック空間のチャージ s 部分空間の基底状態 $\langle s|$, $|s\rangle$ を導入する．さらに，基本的なフェルミオン 2 次形式として

$$L_0 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} n{:}\psi_{-n}\psi_n^*{:}, \quad W_0 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} n^2{:}\psi_{-n}\psi_n^*{:},$$
$$H_k = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{kn}{:}\psi_{-n}\psi_n^*{:}, \quad J_k = \sum_{n\in\mathbf{Z}} {:}\psi_{-n}\psi_{n+k}^*{:}$$

を考える．変形された分配函数 $Z'(s, \boldsymbol{t}, \hat{\boldsymbol{t}})$ はフェルミオン表示

$$Z'(s, \boldsymbol{t}, \hat{\boldsymbol{t}}) = \langle s|\Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} e^{H(\boldsymbol{t},\hat{\boldsymbol{t}})} \Gamma'_-(q^{-\rho})|s\rangle, \tag{3}$$

をもつ．ここで $H(\boldsymbol{t}, \hat{\boldsymbol{t}})$ は $H_{\pm k}$ の線形結合 $H(\boldsymbol{t}, \hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{k=1}^\infty t_k H_k + \sum_{k=1}^\infty \hat{t}_k H_{-k}$ であり，$\Gamma_\pm(\boldsymbol{x})$, $\Gamma'_\pm(\boldsymbol{x})$ は頂点作用素

$$\Gamma_\pm(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k} J_{\pm k}\right), \quad \Gamma'_\pm(z) = \exp\left(-\sum_{k=1}^\infty \frac{(-z)^k}{k} J_{\pm k}\right) \tag{4}$$

の積 $\Gamma_\pm(x_1, x_2, \ldots) = \prod_{i\geq 1} \Gamma_\pm(x_i)$, $\Gamma'_\pm(x_1, x_2, \ldots) = \prod_{i\geq 1} \Gamma'_\pm(x_i)$ である．$J_{\pm k}$ と $H_{\pm k}$ は量子トーラス代数の基底の一部であり，$\Gamma_\pm(q^{-\rho})$ を用いて定式化される「シフト対称性」（脚注 1）ならびにその $\Gamma'_\pm(q^{-\rho})$ に関する類似物によって，互いに結ばれる．このことを用いて次の結果[3] が得られる．

[1] T. Nakatsu and K. Takasaki, Melting crystal, quantum torus and Toda hierarchy, Comm. Math. Phys. **285** (2009), 445–468.

[2] A. Brini, The local Gromov-Witten theory of $\mathbb{CP}^1$ and integrable hierarchies, arXiv:1002.0582 [math-ph].

[3] K. Takasaki, Integrable structure of modified melting crystal model, arXiv:1208.4497 [math-ph].

定理 1　$Z'(s,\boldsymbol{t},\hat{\boldsymbol{t}})$ は

$$Z'(s,\boldsymbol{t},\hat{\boldsymbol{t}}) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k t_k - \hat{t}_k}{1-q^k}\right)\tau'(s,\iota(\boldsymbol{t}),-\hat{\boldsymbol{t}}) \tag{5}$$

と表せる．ここで $\tau'(s,\boldsymbol{t},\hat{\boldsymbol{t}})$ は

$$g = q^{W_0/2}\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho})q^{-W_0/2} \tag{6}$$

というフェルミオン作用素で決まる戸田階層の τ 函数

$$\tau'(s,\boldsymbol{t},\hat{\boldsymbol{t}}) = \langle s|\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}t_k J_k\right)g\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\hat{t}_k J_{-k}\right)|s\rangle, \tag{7}$$

であり，ι は時間変数の交互反転 $\iota(\boldsymbol{t}) = (-t_1, t_2, \ldots, (-1)^k t_k, \ldots)$ を表す．

この τ 函数と Ablowitz-Ladik 階層との関係を調べるために，フェルミオン 2 次形式と $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 行列の対応 $:\psi_{-i}\psi_j^*: \leftrightarrow E_{ij}$ を利用する．基本的差分作用素 $s, e^{\partial/\partial s}$ に対応する行列 $\Delta = \sum_{i\in\mathbf{Z}} iE_{ii}$, $\Lambda = \sum_{i\in\mathbf{Z}} E_{i,i+1}$ を用いれば，前述のフェルミオン 2 次形式は

$$L_0 = \Delta,\quad W_0 = \Delta^2,\quad H_k = q^{k\Delta},\quad J_k = \Lambda^k \tag{8}$$

というように行列表示され，頂点作用素は

$$\Gamma_\pm(z) = (1 - z\Lambda^{\pm 1})^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n\Lambda^{\pm n},\quad \Gamma'_\pm(z) = 1 + z\Lambda^{\pm 1} \tag{9}$$

という行列になる．これらに基づく代数的計算から，行列表示された g は

$$\begin{aligned} W &= q^{\Delta^2/2}\Gamma'_-(Qq^{-\rho})^{-1}\Gamma_-(q^{-\rho})^{-1}q^{-\Delta^2/2},\\ \hat{W} &= q^{\Delta^2/2}\Gamma_+(Qq^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho})q^{-\Delta^2/2} \end{aligned} \tag{10}$$

という行列（それぞれ下三角，上三角で，W の対角成分は 1 である）によって

$$g = W^{-1}\hat{W} \tag{11}$$

というように因子分解されることがわかる．これは戸田階層の解法に用いられる Gauss 分解を $\boldsymbol{t} = \hat{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$ の場合に特化したものとみなせる．$W, \hat{W}$ を用いて Lax 作用素の行列表示 $L = W\Lambda W^{-1}$, $\hat{L} = \hat{W}\Lambda\hat{W}^{-1}$ を求めれば，$L, \hat{L}$ は

$$L = BC^{-1},\quad \hat{L}^{-1} = -CB^{-1},\quad B = \Lambda - q^{\Delta},\quad C = 1 + Qq^{\Delta-1}\Lambda^{-1} \tag{12}$$

という因子分解された形[4]をしていることがわかる．Brini たちが示したように[5]，この因子分解された形は戸田階層の中で Ablowiz-Ladki 階層を特徴付けていて，戸田階層の時間発展で保たれる．こうして，脚注 3 の論文で予想したように，次の結論が得られる．

定理 2　上の τ 函数 $\tau'(s,\boldsymbol{t},\hat{\boldsymbol{t}})$ は Ablowitz-Ladik 階層の解に対応する．

---

[4] C^{-1}, B^{-1} はそれぞれ下三角，上三角行列として定義される．結果として $L \neq -\hat{L}$ である．

[5] A. Brini, G. Carlet and P. Rossi, Integrable hierarchies and the mirror model of local $\mathbb{CP}^1$, arXiv:1105.4508 [math.AG].