溶解結晶模型と Ablowiz-Lakik 階層

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

2013 年 3 月 22 日京都大学

要旨　“resolved conifold” 上の位相的弦理論に関連する溶解結晶模型が Ablowitz-Ladik 階層（あるいは，それと同値な Ruijsenaars-戸田階層）の特殊解と対応することを τ 函数と Lax 形式の両面において説明する．

References

• Integrable structure of modified melting crystal model, arXiv:1208.4497 [math-ph]（予想）

• Modified melting crystal model and Ablowitz-Ladik hierarchy, arXiv:1302.6129 [math-ph]（解決）

以前考えた溶解結晶模型

分配函数（3 次元ヤング図形の重み付き数え上げに由来する）

$$Z = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho})^2 Q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-Qq^n)^{-n}$$

ここで $s_\lambda(q^{-\rho})$ は無限変数のシューア函数 $s_\lambda(\boldsymbol{x})$ の

$$q^{-\rho} = (q^{1/2}, q^{3/2}, \ldots, q^{i-1/2}, \ldots)$$

における特殊値である．$\mathcal{P}$ は長さ無制限の分割全体の集合を表す．

この分配函数を離散変数 $s \in \mathbf{Z}$ と連続変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$ によって変形したもの $Z(s, \boldsymbol{t})$ は 1 次元戸田階層の特殊解と関係する．(T. Nakatsu and K. Takasaki, Comm. Math. Phys. **285** (2009), 445–468)

今回考える溶解結晶模型

分配函数（resolved conifold 上の位相的弦理論の振幅に由来する）

$$Z' = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho}) s_{{}^{\mathrm{t}}\lambda}(q^{-\rho}) Q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + Qq^n)^n$$

Z における $s_\lambda(q^{-\rho})^2$ を $s_\lambda(q^{-\rho}) s_{{}^{\mathrm{t}}\lambda}(q^{-\rho})$ （${}^{\mathrm{t}}\lambda$ は λ の共役を表す）に置き換えた形をしている．さらに $Q \to -Q$ と置き換えれば，resolved conifold 上の位相的弦理論の振幅になる．

以下では，離散変数 $s \in \mathbf{Z}$ と 2 系列の連続変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$, $\bar{\boldsymbol{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots)$ による変形 $Z'(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})$ を考えて，それが Ablowitz-Ladik（あるいは Ruijsenarrs-戸田）階層の特殊解と対応していることを説明する．

外部ポテンシャルを入れた分配函数

$$Z'(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho}) s_{{}^{\mathrm{t}}\lambda}(q^{-\rho}) Q^{|\lambda|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\lambda,s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}$$

$$\Phi(\lambda,s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) = \sum_{k=1}^\infty t_k \Phi_k(\lambda,s) + \sum_{k=1}^\infty \bar{t}_k \Phi_{-k}(s,\lambda),$$

$$\Phi_k(\lambda,s) = \sum_{i=1}^\infty q^{k(\lambda_i+s-i+1)} - \sum_{i=1}^\infty q^{k(-i+1)} \quad (\text{発見的表示})$$

$$= \sum_{i=1}^\infty (q^{k(\lambda_i+s-i+1)} - q^{k(s-i+1)}) + \frac{1-q^{ks}}{1-q^k} q^k$$

「発見的表示」の引算項はフェルミオン演算子の正規順序に由来する．

フェルミオン

- フェルミオン生成消滅演算子 ψ_n, ψ_n^* $(n \in \mathbf{Z})$

$$\psi_m \psi^* + \psi_n^* \psi_n = \delta_{m+n,0}, \quad \psi_m \psi_n + \psi_n \psi_m = \psi_m^* \psi_n^* + \psi_n^* \psi_m^* = 0$$

- チャージ $s \in \mathbf{Z}$ の基底状態 $\langle s|$, $|s\rangle$ と励起状態 $\langle \lambda, s|$, $|\lambda, s\rangle$ $(\lambda \in \mathcal{P})$

$$\langle s| = \langle -\infty| \cdots \psi_{s-1}^* \psi_s^*, \quad |s\rangle = \psi_{-s} \psi_{-s+1} \cdots | -\infty\rangle$$

- 基本的なフェルミオン 2 次形式

$$L_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n {:}\psi_{-n} \psi_n^*{:}, \quad W_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n^2 {:}\psi_{-n} \psi_n^*{:},$$

$$H_k = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{kn} {:}\psi_{-n} \psi_n^*{:}, \quad J_k = \sum_{n \in \mathbf{Z}} {:}\psi_{-n} \psi_{n+k}^*{:}$$

分配函数のフェルミオン表示

$$Z'(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) = \langle s|\Gamma_+(q^{-\rho})Q^{L_0}e^{H(\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}\Gamma'_-(q^{-\rho})|s\rangle$$

$$H(\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k H_{-k},$$

$$\Gamma_\pm(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}J_{\pm k}\right), \quad \Gamma'_\pm(z) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k}J_{\pm k}\right),$$

$$\Gamma_\pm(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^{\infty}\Gamma_\pm(q^{i-1/2}), \quad \Gamma'_\pm(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^{\infty}\Gamma'_\pm(q^{i-1/2}).$$

2D 戸田階層の τ 函数との関係

定理 1　$Z'(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ は

$$Z'(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k t_k - \bar{t}_k}{1-q^k}\right)\tau(s,\iota(\boldsymbol{t}),-\bar{\boldsymbol{t}})$$

と表せる．ここで $\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ は

$$g = q^{W_0/2}\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho})q^{-W_0/2}$$

という演算子で決まる戸田階層の τ 函数

$$\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) = \langle s|\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}t_kJ_k\right)g\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\bar{t}_kJ_{-k}\right)|s\rangle,$$

であり，ι は時間変数の交互反転 $\iota(\boldsymbol{t}) = (-t_1,t_2,\ldots,(-1)^kt_k,\ldots)$ を表す.

定理 1 の証明に使うもの

- 量子トーラス代数のフェルミオン 2 次形式による実現

$$V_m^{(k)} = q^{-km/2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{kn} {:}\psi_{m-n}\psi_n^*{:}$$

- H_k, J_k をその基底の一部とみなすこと

$$H_k = V_0^{(k)}, \quad J_m = V_m^{(0)}$$

- $\Gamma_\pm(q^{-\rho})$, $\Gamma'_\pm(q^{-\rho})$, $q^{W_0/2}$ による「シフト対称性」(随伴作用により $V_m^{(k)}$ の間に引き起こされる線形変換)

これらを用いて $Z'(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})$ を書き直す．やり方は以前の溶解結晶模型の場合と同様である．

Ablowitz-Ladik（Ruijsenaars-戸田）階層との関係

定理 2　上の τ 函数に対する 2D 戸田階層の Lax 作用素 $L, \bar{L}$ は

$$L = BC^{-1}, \quad \bar{L}^{-1} = -CB^{-1},$$

$$B = e^{\partial_s} - b, \quad C = 1 + ce^{-\partial_s} \quad (b, c \text{ は } s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}} \text{ の函数})$$

という因子分解された形をもつ．

系　この τ 函数は Ablowitz-Ladik 階層（あるいはそれと同値な Ruijsenaars-戸田階層）の τ 函数である．

注意　有限階差分作用素の逆には 2 通りの解釈が可能だが，ここでは B, C のそれぞれの逆として $B^{-1} = -b^{-1} + (e^{\partial_s}$ の正べき$)$, $C^{-1} = 1 + (e^{\partial_s}$ の負べき$)$ を考える．特に $L \neq -\bar{L}$ である．

注意　定理 2 のような Lax 作用素の因子分解が Ablowitz-Ladik 階層への簡約（Toeplitz 簡約）を特徴付けることは A. Brini, G. Carlet and P. Rossi, Physica **D241** (2012), 2156–2162 が示している．

定理 2 の証明に使うもの

- フェルミオン 2 次形式の無限行列表示

$$X = \sum_{i,j \in \mathbf{Z}} x_{ij} E_{ij} \quad \longleftrightarrow \quad \hat{X} = \sum_{i,j \in \mathbf{Z}} x_{ij} {:}\psi_{-i} \psi_j^*{:}$$

- 対応する $\Gamma_\pm(q^{-\rho}), \Gamma'_\pm(q^{-\rho})$ と g の無限行列表示（行列値の「量子ダイログ函数」が現れる）

- 無限行列の分解問題による 2D 戸田階層の解の特徴付け

- 「初期時刻」$\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}} = \mathbf{0}$ において分解問題の解と Lax 作用素の具体的な表示を求めること

- $L, \bar{L}$ の因子分解された形が 2D 戸田階層の時間発展によって保たれること（Brini et al. 前掲論文）

フェルミオン 2 次形式の無限行列表現

基本的フェルミオン 2 次形式と頂点作用素の $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 行列表示は

$$L_0 = \Delta, \quad W_0 = \Delta^2, \quad H_k = q^{k\Delta}, \quad J_k = \Lambda^k,$$

$$\Gamma_\pm(z) = (1 - z\Lambda^{\pm 1})^{-1}, \quad \Gamma'_\pm(z) = 1 + z\Lambda^{\pm 1}$$

となる．ここで Δ, Λ は基本的差分作用素 s, e^{∂_s} に対応する行列

$$\Delta = \sum_{i\in\mathbf{Z}} iE_{ii}, \quad \Lambda = \sum_{i\in\mathbf{Z}} E_{i,i+1}$$

である．特に，$\Gamma_\pm(q^{-\rho}), \Gamma'_\pm(q^{-\rho})$ は行列値量子ダイログ函数になる．

$$\boxed{\Gamma_\pm(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^{i-1/2}\Lambda^{\pm 1})^{-1}, \quad \Gamma'_\pm(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + q^{i-1/2}\Lambda^{\pm 1}).}$$

これはシフト対称性に対する別の説明を与える．

行列の分解問題による解の特徴付け

分解問題　与えられた可逆な $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 行列 U に対して次のような $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 行列 $W,\bar{W}$ を見出すこと

(i) W は下三角で，対角成分はすべて 1 である．

(ii) $\bar{W}$ は上三角で，対角成分はいずれも 0 と異なる．

(iii) $W,\bar{W}$ は次の等式を満たす．

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k\Lambda^k\right) U \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\bar{t}_k\Lambda^{-k}\right) = W^{-1}\bar{W}.$$

• $W,\bar{W}$ から得られる Lax 行列 \$$L = W\Lambda W^{-1}$, $\bar{L} = \bar{W}\Lambda\bar{W}^{-1}$ は 2D 戸田階層の Lax 方程式系を満たす．2D 戸田階層のすべての解が原理的にはこのようにして捉えられる．

• 分解問題を実際に解くことは一般には難しいが，$Z'(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ の場合には，初期時刻 $\boldsymbol{t}=\bar{\boldsymbol{t}}=\mathbf{0}$ における $W,\bar{W}$ が具体的に求められる．