位相的弦理論における一般化された Ablowitz-Ladik 階層

高崎金久（京都大学人間環境学研究科）

昨年３月のセッションにおいて，溶解結晶模型の変種が Ablowitz-Ladik 階層と関係していることを報告した．この模型の分配函数はコニフォルド（resolved conifold）と呼ばれる非コンパクト３次元 Calabi-Yau 多様体の上の位相的弦理論の振幅母函数とみなすこともできる．今回は，後者の観点からの一般化として，コニフォルドを一般化した局所トーリック Calabi-Yau 多様体（一般化コニフォルド）の上の位相的弦理論を考察し，その振幅母函数と一般化された Ablowitz-Ladik 階層との関係を明らかにする．

一般化されたコニフォルドのウェブ図形は $2N-1$ 本のジグザグにつながった内線に $2N+2$ 本の外線を添えた形をしている（$N=1$ の場合が本来のコニフォルドに相当する）．以下で考えるのは，このウェブ図形の左右両端の水平な外線のそれぞれに一般の分割 λ,μ を，また他の外線にゼロ分割 $\emptyset$ を置いた開弦理論の振幅である．この振幅を位相的頂点の方法によって求めて複素フェルミ場 $\psi(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\psi_n z^{-n-1}$, $\psi^*(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\psi_n^* z^{-n}$ の言葉に翻訳すれば，フォック空間上の次の作用素 g の行列要素 $\langle\lambda|g|\mu\rangle$ になる[1]：

$$
\begin{aligned}
g = {} & q^{W_0/2}\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q_1^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho}) \\
& \times Q_2^{L_0}\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q_3^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho}) \\
& \times \cdots \\
& \times Q_{2N-2}^{L_0}\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q_{2N-1}^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho})q^{-W_0/2}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで q は弦理論のパラメータ（$0<|q|<1$），$Q_1,\ldots,Q_{2N-1}$ は一般化コニフォルドのケーラーパラメータである．L_0, W_0 は

$$
L_0=\sum_{n\in\mathbf{Z}} n{:}\psi_{-n}\psi_n^*{:},\quad W_0=\sum_{n\in\mathbf{Z}} n^2{:}\psi_{-n}\psi_n^*{:}
$$

というフェルミオン２次形式である．さらに $J_k=\sum_{n\in\mathbf{Z}}{:}\psi_{-n}\psi_{n+k}^*{:}$ を用いて頂点作用素

$$
\Gamma_\pm(z)=\exp\left(\sum_{k=1}^\infty\frac{z^k}{k}J_{\pm k}\right),\quad \Gamma'_\pm(z)=\exp\left(-\sum_{k=1}^\infty\frac{(-z)^k}{k}J_{\pm k}\right)
$$

を構成する．$\Gamma_\pm(q^{-\rho})$ と $\Gamma_\pm(q^{-\rho})$ は多変数頂点作用素 $\Gamma_\pm(x_1,x_2,\ldots)=\prod_{i\ge1}\Gamma_\pm(x_i)$, $\Gamma'_\pm(x_1,x_2,\ldots)=\prod_{i\ge1}\Gamma'_\pm(x_i)$ を

$$
q^{-\rho}=(q^{1/2},q^{3/2},\ldots,q^{i-1/2},\ldots)
$$

に特殊化したものである．

$\langle\lambda|g|\mu\rangle$ をチャージ s へ拡張したもの $\langle\lambda,s|g|\mu,s\rangle$ を２個のシューア函数で母函数化すれば，２系列の時間変数 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\ldots)$, $\bar{\boldsymbol{t}}=(\bar t_1,\bar t_2,\ldots)$ をもつ戸田階層の τ 函数

$$
\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})=\langle s|\exp\left(\sum_{k=1}^\infty t_kJ_k\right)g\exp\left(-\sum_{k=1}^\infty \bar t_kJ_{-k}\right)|s\rangle
\tag{2}
$$

[1] 正確に言えば，これは位相的頂点の方法で得られる振幅を少し修正したものである．

が得られる．こうして定まる戸田階層の特殊解が我々の考察対象である．

Lax 形式においてこの解を調べるために，フェルミオン 2 次形式と $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 行列の対応 $:\psi_{-n}\psi_m^*: \leftrightarrow E_{nm}$ を利用する．この対応によって L_0, W_0, J_k を行列表示すれば

$$L_0 = \Delta, \quad W_0 = \Delta^2, \quad J_k = \Lambda^k$$

となる．Λ, Δ は 1 次元格子 $\mathbf{Z}$ 上の作用素 $e^{\partial/\partial s}$, $s\cdot$ に相当する行列

$$\Lambda = \sum_{n\in\mathbf{Z}} E_{n,n+1}, \quad \Delta = \sum_{n\in\mathbf{Z}} nE_{nn}$$

である．$\Gamma_\pm(q^{-\rho})$ と $\Gamma'_\pm(q^{-\rho})$ の行列表示は行列値の量子ダイログ函数

$$\Gamma_\pm(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^\infty (1 - q^{i-1/2}\Lambda^{\pm1})^{-1}, \quad \Gamma'_\pm(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^\infty (1 + q^{i-1/2}\Lambda^{\pm1})$$

になる．これらに基づいて以下のことが示せる：

(i) g の行列表示は

$$g = W^{-1}\bar{W} \tag{3}$$

というように因子分解できる．ここで $W, \bar{W}$ は

$$\begin{aligned} W &= q^{\Delta^2/2}\cdot\prod_{i=1}^N \Gamma_-(Q^{(2i-1)}q^{-\rho})^{-1}\Gamma'_-(Q^{(2i)}q^{-\rho})^{-1}\cdot q^{-\Delta^2/2}, \\ \bar{W} &= q^{\Delta^2/2}\cdot\prod_{i=1}^N \Gamma_+(Q^{(2i-1)-1}q^{-\rho})\Gamma'_+(Q^{(2i)-1}q^{-\rho})\cdot(Q_1\cdots Q_{2N-1})^\Delta q^{-\Delta^2/2} \end{aligned} \tag{4}$$

（$Q^{(i)} = Q_1Q_2\cdots Q_{i-1}$）という行列である．

(ii) W は対角成分が 1 の下三角行列，$\bar{W}$ は対角成分が非零の上三角行列であり，(3) は戸田階層の初期値問題の解法に用いられる因子分解

$$\exp\left(\sum_{k=1}^\infty t_k\Lambda^k\right) g \exp\left(-\sum_{k=1}^\infty \bar{t}_k\Lambda^{-k}\right) = W(\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})^{-1}\bar{W}(\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) \tag{5}$$

を $\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}} = \mathbf{0}$ で考えたものとみなせる．

(iii) 行列表示されたラックス作用素の $\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}} = \mathbf{0}$ における初期値 $L = W\Lambda W^{-1}$, $\bar{L}^{-1} = \bar{W}\Lambda^{-1}\bar{W}^{-1}$ は

$$\begin{aligned} L = B\Lambda^{1-N}C^{-1}, \quad \bar{L}^{-1} = DC\Lambda^{N-1}B^{-1}, \\ B = \Lambda^N + b_1\Lambda^{N-1} + \cdots + b_N, \quad C = 1 + c_1\Lambda^{-1} + \cdots + c_N\Lambda^{-N} \end{aligned} \tag{6}$$

（$b_1, \ldots, b_N, c_1, \ldots, c_N$ は対角行列，D は定数）という特殊な形をしている．

(6) は Brini らが戸田階層の Ablowitz-Ladik 階層への簡約条件として見出したもの[2] の一般化になっている．すなわち，この特殊な形は時間発展で保たれて，戸田階層の簡約系（Ablowitz-Ladik 階層の一般化）を定める．こうして，(1) は一般化された Ablowitz-Ladik 階層の特殊解を定める，という結論が得られる．

[2] A. Brini, G. Carlet and P. Rossi, Integrable hierarchies and the mirror model of local $\mathbb{CP}^1$, Physica **D241** (2012), 2156–2167. arXiv:1105.4508 [math.AG].