位相的弦理論における一般化された Ablowitz-Ladik 階層

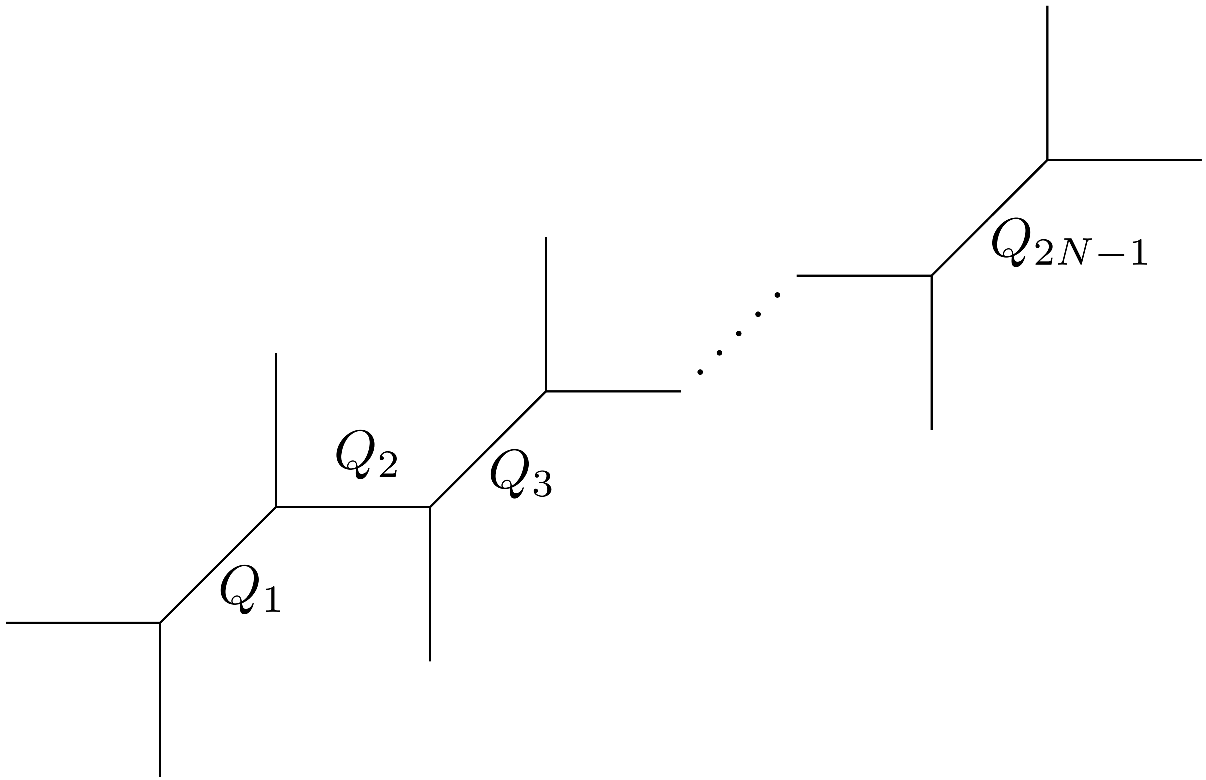
高崎金久（京都大学人間環境学研究科）

日本数学会年会 2014 年 3 月 17 日学習院大学

要旨　コニフォルドを一般化した 3 次元トーリック Calabi-Yau 多様体（一般化コニフォルド）に対して，位相的弦理論の開弦振幅の母函数と一般化された Ablowitz-Ladik 階層との関係を明らかにする．

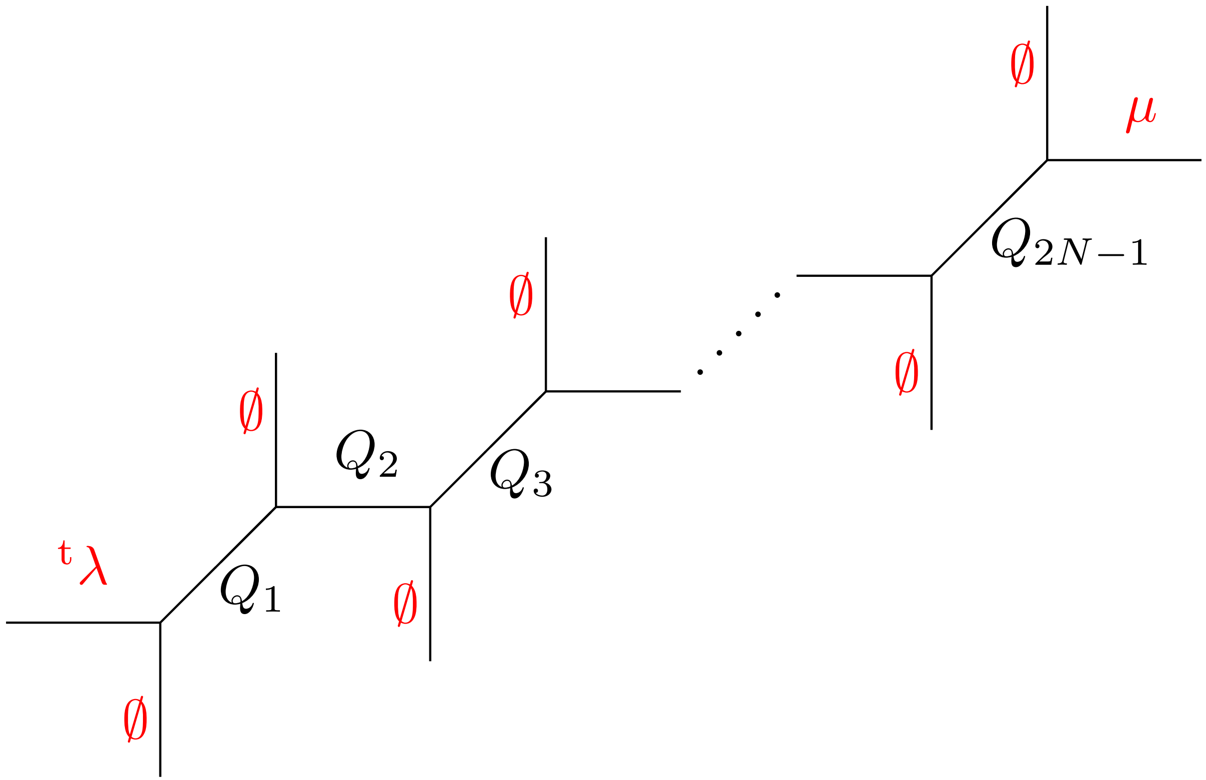
文献　Generalized Ablowitz-Ladik hierarchy in topological string theory, arXiv:1312.7184 [math-ph], J. Phys. A: Math. Theor. (accepted for publication)

一般化コニフォルドのウェブ図形



内線にはケーラーパラメータ $Q_1, \cdots, Q_{2N-1}$ を割り当てる．$N=1$ の場合が本来のコニフォルド（resolved conifold）に相当する．

開弦振幅の設定（境界条件）



左右両端の外線に一般の分割 ${}^{\mathrm{t}}\lambda, \mu$，それ以外の外線にゼロ分割 $\emptyset$ を置く．これらは開弦の世界面の境界条件（巻き付き数）を定める．

開弦振幅のフェルミオン表示

この場合の開弦振幅 $Z_{{}^t\lambda\emptyset\cdots\emptyset\mu}$ は位相的頂点の方法によって計算できる．その結果は 2 次元複素フェルミ場 $\psi(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\psi_n z^{-n-1}$, $\psi^*(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\psi^*_n z^{-n}$ のフォック空間の上の次のような作用素 g の行列要素 $\langle\lambda|g|\mu\rangle$ として表せる：

$$
\begin{aligned}
g = {} & q^{W_0/2}\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q_1^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho}) \\
& \times Q_2^{L_0}\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q_3^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho}) \\
& \times \cdots \\
& \times Q_{2N-2}^{L_0}\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q_{2N-1}^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho})q^{-W_0/2}.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
L_0=\sum_{n\in\mathbf{Z}} n{:}\psi_{-n}\psi^*_n{:},\quad W_0=\sum_{n\in\mathbf{Z}} n^2{:}\psi_{-n}\psi^*_n{:}
$$

開弦振幅のフェルミオン表示（続き）

また，$\Gamma_\pm(q^{-\rho}), \Gamma'_\pm(q^{-\rho})$ は頂点作用素

$$\Gamma_\pm(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k} J_{\pm k}\right), \quad \Gamma'_\pm(z) = \exp\left(-\sum_{k=1}^\infty \frac{(-z)^k}{k} J_{\pm k}\right),$$

$$\Gamma_\pm(x_1, x_2, \ldots) = \prod_{i\geq 1} \Gamma_\pm(x_i), \quad \Gamma'_\pm(x_1, x_2, \ldots) = \prod_{i\geq 1} \Gamma'_\pm(x_i)$$

を

$$q^{-\rho} = (q^{1/2}, q^{3/2}, \ldots, q^{i-1/2}, \ldots)$$

に特殊化したもの．

注意　開弦振幅 $Z_{{}^{\mathrm{t}}\lambda\emptyset\ldots\emptyset\mu}$ との正確な関係は次の通り：

$$Z_{{}^{\mathrm{t}}\lambda\emptyset\ldots\emptyset\mu} = q^{(|\lambda|-|\mu|)/2}\langle\lambda|g|\mu\rangle|_{Q_n\to -Q_n}$$

開弦振幅の母函数＝τ 函数

変数の組 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots)$ を用意して，charge-s sector に拡張した行列要素 $\langle\lambda,s|g|\mu,s\rangle$ をシューア函数 $s_\lambda(\boldsymbol{x})$, $s_\mu(\boldsymbol{y})$ によって母函数

$$\sum_{\lambda,\mu\in\mathcal{P}} s_\lambda(\boldsymbol{x})s_\mu(\boldsymbol{y})\langle\lambda,s|g|\mu,s\rangle$$

に組む．これは変数変換

$$t_k=\sum_{i\geq 1}\frac{x_i^k}{k},\quad \bar{t}_k=-\sum_{i\geq 1}\frac{y_i^k}{k}$$

によって 2 次元戸田階層の τ 函数

$$\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})=\langle s|\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}t_kJ_k\right)g\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\bar{t}_kJ_{-k}\right)|s\rangle$$

になる．この解を Lax 形式に翻訳する．

作用素の無限行列表示

フェルミオン2次形式と $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 行列の対応 $:\psi_{-n}\psi_m^*: \leftrightarrow E_{nm}$ に従って無限行列表示すれば

$$
\begin{aligned}
L_0 = \Delta, \quad W_0 = \Delta^2, \quad J_k = \Lambda^k, \\
\Gamma_\pm(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^{i-1/2}\Lambda^{\pm 1})^{-1}, \\
\Gamma'_\pm(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + q^{i-1/2}\Lambda^{\pm 1})
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
\Lambda = \sum_{n\in\mathbf{Z}} E_{n,n+1}, \quad \Delta = \sum_{n\in\mathbf{Z}} nE_{nn}
$$

は1次元格子上の作用素 $e^{\partial/\partial s}$, s に相当する．$\Gamma_\pm(q^{-\rho})$ と $\Gamma'_\pm(q^{-\rho})$ の行列表示は行列値の量子ダイログ函数とみなせる．

g の無限行列表示

τ 函数を定義する作用素 g は次の行列に対応する：

$$
\begin{aligned}
U = q^{\Delta^2/2}&\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q_1^{\Delta}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho})\\
&\times Q_2^{\Delta}\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q_3^{\Delta}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho})\\
&\times \cdots\\
&\times Q_{2N-2}^{\Delta}\Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})Q_{2N-1}^{\Delta}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho})q^{-\Delta^2/2}.
\end{aligned}
$$

この行列に対して交換関係

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\pm(q^{-\rho})Q^{\Delta} &= Q^{\Delta}\Gamma_\pm(Q^{\pm 1}q^{-\rho}),\\
\Gamma'_\pm(q^{-\rho})Q^{\Delta} &= Q^{\Delta}\Gamma'_\pm(Q^{\pm 1}q^{-\rho})
\end{aligned}
$$

を用いて Q_n^{Δ} を右端へ移動する．残る $\Gamma_\pm, \Gamma'_\pm$ は互いに可換で，Γ_-, Γ'_- を左に，Γ_+, Γ'_+ を右に寄せることができる．これによって，次に示すような U の三角分解（Gauss 分解）が得られる．

U の三角分解

命題　U は下三角行列 $W_{(0)}^{-1}$ と上三角行列 $\bar{W}_{(0)}$ の積に分解できる：

$$g = W_{(0)}^{-1}\bar{W}_{(0)},$$

$$W_{(0)} = q^{\Delta^2/2} \cdot \prod_{i=1}^{N} \Gamma_-(Q^{(2i-1)}q^{-\rho})^{-1}\Gamma'_-(Q^{(2i)}q^{-\rho})^{-1} \cdot q^{-\Delta^2/2},$$

$$\bar{W}_{(0)} = q^{\Delta^2/2} \cdot \prod_{i=1}^{N} \Gamma_+(Q^{(2i-1)-1}q^{-\rho})\Gamma'_+(Q^{(2i)-1}q^{-\rho}) \cdot (Q_1 \cdots Q_{2N-1})^{\Delta} \cdot q^{-\Delta^2/2}$$

ここで

$$Q^{(n)} = Q_1 \cdots Q_{n-1}, \quad Q^{(1)} = 1$$

注意　添え字 “$_{(0)}$” は $\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$ における初期値であること（後述）を示すために付けた.

dressing operator の初期値

dressing operator（の行列表示）$W, \bar{W}$ を定める分解問題

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \Lambda^k\right) U \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k \Lambda^{-k}\right) = W^{-1}\bar{W}$$

に照らせば，これらの行列

$$W_{(0)} = q^{\Delta^2/2} \cdot \prod_{i=1}^{N} \Gamma_-(Q^{(2i-1)}q^{-\rho})^{-1}\Gamma'_-(Q^{(2i)}q^{-\rho})^{-1} \cdot q^{-\Delta^2/2},$$

$$\bar{W}_{(0)} = q^{\Delta^2/2} \cdot \prod_{i=1}^{N} \Gamma_+(Q^{(2i-1)-1}q^{-\rho})\Gamma'_+(Q^{(2i)-1}q^{-\rho}) \cdot (Q_1 \cdots Q_{2N-1})^{\Delta} \cdot q^{-\Delta^2/2}$$

は dressing operator の $\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$ における初期値 $W|_{\boldsymbol{t}=\bar{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{0}}, \bar{W}_{\boldsymbol{t}=\bar{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{0}}$ とみなせる．

Lax operator の初期値

命題　Lax operator（の行列表示）$L, \bar{L}^{-1}$ の初期値

$$L_{(0)} = L|_{\boldsymbol{t}=\bar{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{0}} = W_{(0)}\Lambda W_{(0)}^{-1}, \quad \bar{L}_{(0)}^{(-1)} = \bar{L}|_{\boldsymbol{t}=\bar{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{0}} = \bar{W}_{(0)}\Lambda^{-1}\bar{W}_{(0)}^{-1}$$

は因子分解された形

$$L_{(0)} = B_{(0)}\Lambda^{1-N}C_{(0)}^{-1}, \quad \bar{L}_{(0)}^{-1} = DC_{(0)}\Lambda^{N-1}B_{(0)}^{-1} \ (\neq DL_{(0)})$$

をしている．ここで D は定数

$$D = (-1)^N Q_2 Q_4 \cdots Q_{2N-2}$$

であり，$B_{(0)}, C_{(0)}$ は有限階の差分作用素に対応する行列

$$B_{(0)} = \Lambda^N + b_1\Lambda^{N-1} + \cdots + b_N,$$

$$C_{(0)} = 1 + c_1\Lambda^{-1} + \cdots + c_N\Lambda^{-N}$$

($b_1, \cdots, b_N, c_1, \cdots, c_N$ は対角行列）である．

Lax operator の初期値（続き）

証明の概略　前述のような $W_{(0)}, \bar{W}_{(0)}$ の具体的な表示を用いて $L_{(0)}, \bar{L}_{(0)}^{-1}$ を計算すれば

$$L_{(0)} = \prod_{n=1}^{N}(1 - Q^{(2n-1)}q^{\Delta}\Lambda^{-1}) \cdot \Lambda \cdot \prod_{n=1}^{N}(1 + Q^{(2n)}\Lambda^{-1}q^{\Delta})^{-1},$$

$$\bar{L}_{(0)}^{-1} = Q_1 \cdots Q_{2N-1} \prod_{n=1}^{N}(1 + Q^{(2n)-1}q^{-\Delta}\Lambda) \cdot \Lambda^{-1} \cdot \prod_{n=1}^{N}(1 - Q^{(2n-1)-1}\Lambda q^{-\Delta})^{-1}$$

となる．$B_{(0)}, C_{(0)}$ を

$$B_{(0)} = \prod_{n=1}^{N}(1 - Q^{(2n-1)}q^{\Delta}\Lambda^{-1}) \cdot \Lambda^{N}, \quad C_{(0)} = \prod_{n=1}^{N}(1 + Q^{(2n)}\Lambda^{-1}q^{\Delta})$$

と定めれば，これらは前述の形になる．

一般化された Ablowitz-Ladik 階層

命題　Lax operator の因子分解された形

$$L = B\Lambda^{1-N}C^{-1}, \quad \bar{L}^{-1} = DC\Lambda^{N-1}B^{-1} \ (\neq DL),$$

$$B = \Lambda^N + b_1\Lambda^{N-1} + \cdots + b_N,$$

$$C = 1 + c_1\Lambda^{-1} + \cdots + c_N\Lambda^{-N},$$

$$D \text{ は } 0 \text{ でない定数}$$

は戸田階層の時間発展で保たれて，対角行列 $b_1, \cdots, b_N, c_1, \cdots, c_N$ の対角要素 $b_1(s), \cdots, b_N(s), c_1(s), \cdots, c_N(s)$（$s \in \mathbf{Z}$）を従属変数とする簡約系（一般化された Ablowitz-Ladik 階層）を定める．

証明の方針　B と C が満たすべき発展方程式系を求めて，それらが整合的であること（時間発展の可換性）を示す．

系　U が定める戸田階層の特殊解は一般化された Ablowitz-Ladik 階層の解である．