

closed topological vertex の開弦振幅 (改題)

高崎金久 (近畿大学) 中津了勇 (摂南大学)

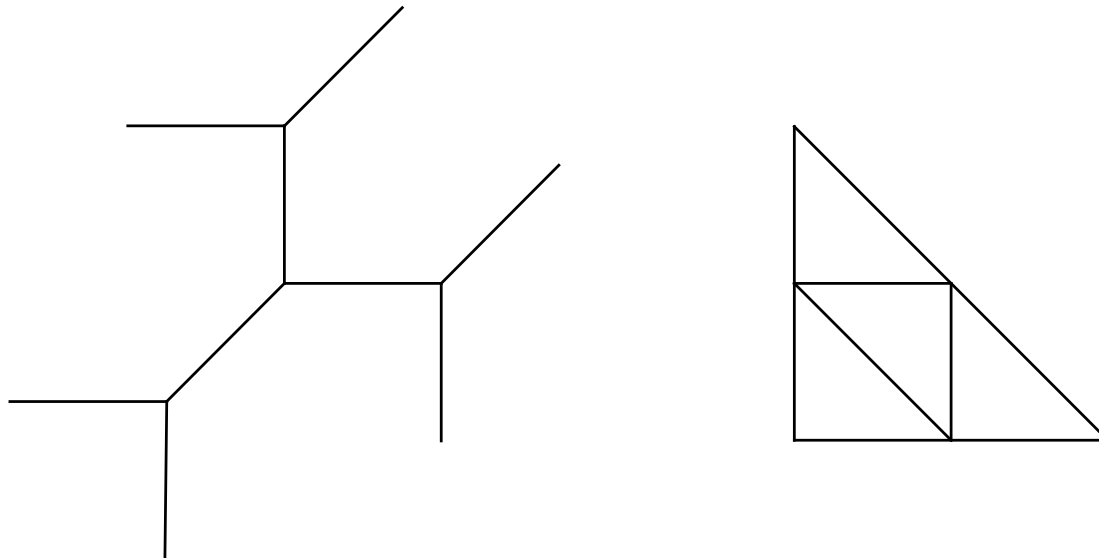
無限可積分系セッション 2015 年 9 月 13 日

要旨 位相的頂点の方法によって closed topological vertex の開弦振幅の一部を計算し, それらの 1 変数母関数がある種の q -差分方程式を満たすことを示す. この q -差分方程式はミラー曲線の量子化とみなせる.

文献 K. Takasaki and T. Nakatsu, arXiv:1507.07053

Closed topological vertex

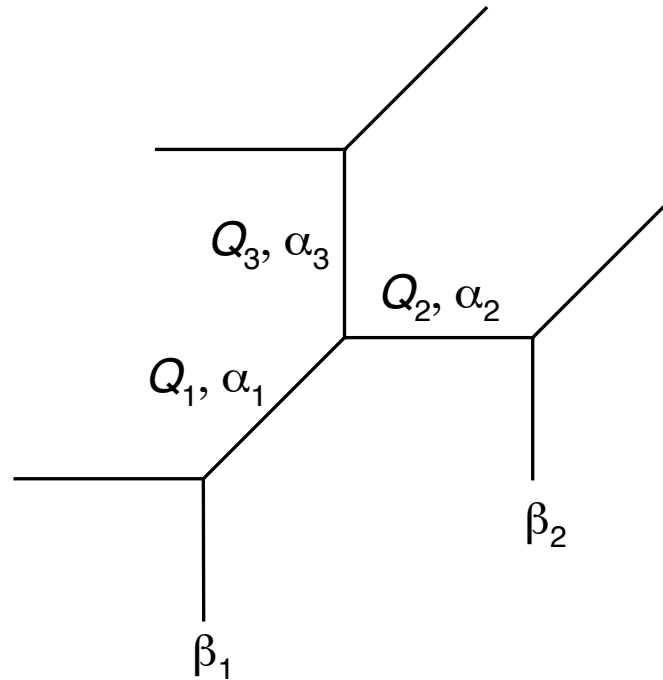
closed topological vertex は下図のようなウェブ図形とトーリック図形（グラフとしては双対）をもつ非コンパクトな 3次元トーリック Calabi-Yau 多様体である．この多様体上の位相的弦理論の分配函数（閉弦振幅）は代数幾何学的方法や位相的頂点の方法によって閉じた形で求められている．



closed topological vertex のウェブ図形（左）とトーリック図形（右）

開弦振幅の設定

本講演では下図に示した特殊な設定での開弦振幅 $Z_{\beta_1\beta_2}^{\text{cv}}$ を考える。
ウェブ図形の外線上の β_1, β_2 は開弦の世界面の境界条件を表す分割
(ヤング図形) であり, 内線上の Q_1, Q_2, Q_3 はケーラーパラメータで
ある。(内線上の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ はあとで位相的頂点の方法によって計算
を行う際に用いる分割であり, 開弦振幅を指定するデータではない.)



位相的頂点の方法による振幅の構成

位相的頂点の方法では，ウェブ図形の頂点に

$$C_{\lambda\mu\nu} = q^{\kappa(\mu)/2} s_{t\nu}(q^{-\rho}) \sum_{\eta} s_{t\lambda/\eta}(q^{-\nu-\rho}) s_{\mu/\eta}(q^{-t\nu-\rho}),$$

$$\kappa(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (\mu_i - 2i + 1), \quad q^{-\nu-\rho} = (q^{-\nu_i + i - 1/2})_{i=1}^{\infty},$$

という重み（近年用いられている定義に従う）を置き，一連の**貼り合わせ規則**に従ってそれらを内線（そこにはケーラーパラメータに関連する重みを与える）に沿って貼り合わせる。

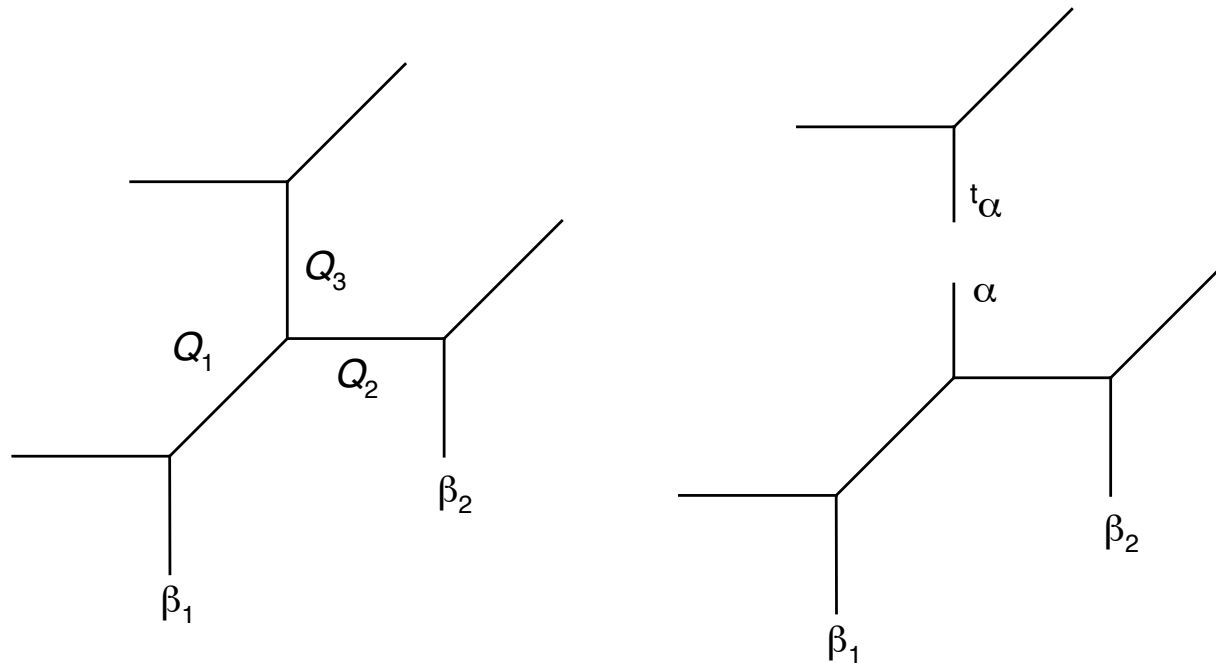
この処方箋に従って $Z_{\beta_1\beta_2}^{\text{cv}}$ を表せば，内線上の分割 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に依存する重みを分割全体の集合 \mathcal{P} にわたって総和したものになる：

$$Z_{\beta_1\beta_2}^{\text{cv}} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{P}} (\text{重みの積})$$

α_1, α_2 についての部分和 $Z_{\beta_1\beta_2|\alpha_3}$ による表示

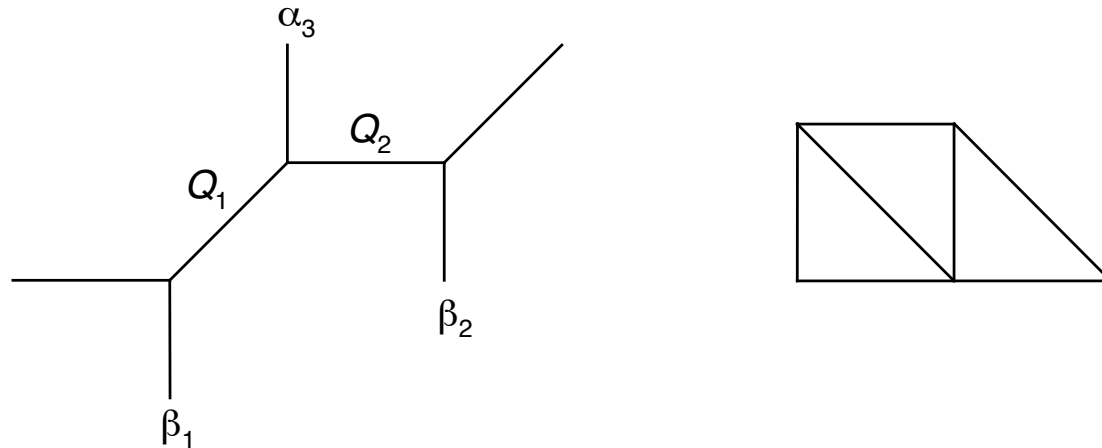
$$Z_{\beta_1\beta_2}^{\text{cv}} = \sum_{\alpha_3 \in \mathcal{P}} Z_{\beta_1\beta_2|\alpha_3} (-Q_3)^{|\alpha_3|} C_{t_{\alpha_3}\emptyset\emptyset}$$

これはウェブ図形を垂直の内線で上側の部分（単一の頂点からなる）と下側の部分に分けたことに相当する．それらを貼り合わせて（ α_3 について総和する）求める開弦振幅 $Z_{\beta_1\beta_2}^{\text{cv}}$ が得られる．



部分和 $Z_{\beta_1\beta_2|\alpha_3}$ の計算

ウェブ図形の下側の部分（下図）は **double \mathbb{CP}^1** と呼ばれるものになる。これはいわゆる **strip（帯状領域）** 上のウェブ図形の1つであり、対応するトーリック図形は高さが1の帯状領域の多角形を三角形分割したものになる。部分和 $Z_{\beta_1\beta_2|\alpha_3}$ はその開弦振幅として、次に示すようなよく知られた具体的な表示をもつ。



double \mathbb{CP}^1 のウェブ図形（左）とトーリック図形（右）

$$\begin{aligned}
Z_{\beta_1\beta_2|\alpha_3} &= s_{\mathfrak{t}\beta_1}(q^{-\rho})s_{\mathfrak{t}\beta_2}(q^{-\rho})s_{\mathfrak{t}\alpha_3}(q^{-\rho}) \\
&\times \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - Q_1Q_2q^{-\beta_{1i} - \mathfrak{t}\beta_{2j} + i + j - 1})^{-1} \\
&\times \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - Q_1q^{-\beta_{1i} - \alpha_{3j} + i + j - 1}) \\
&\times \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - Q_2q^{-\mathfrak{t}\alpha_{3i} - \mathfrak{t}\beta_{2j} + i + j - 1})
\end{aligned}$$

$Z_{\beta_1\beta_2}^{\text{cv}}$ のフェルミオン表示

この表示を $Z_{\beta_1\beta_2}^{\text{cv}}$ の部分和表示に代入し、溶解結晶模型で用いた量子トーラス代数のシフト対称性ならびに $C_{\lambda\mu\theta}$ の巡回対称性を用いることによって、以下のようなフェルミオン表示が得られる。

定理 1

$$\begin{aligned}
 Z_{\beta_1\beta_2}^{\text{cv}} &= q^{\kappa(\beta_2)/2} \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - Q_1 Q_2 q^{-\beta_{1,i} - {}^t\beta_{2,j} + i + j - 1})^{-1} \\
 &\times \langle {}^t\beta_1 | \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) (-Q_1)^{L_0} \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) (-Q_3)^{L_0} \\
 &\times \Gamma_-(q^\rho) \Gamma_+(q^{-\rho}) (-Q_2)^{L_0} \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) | {}^t\beta_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

ここで L_0 はフェルミオンのヴィラソロ代数のゼロモードであり,
 $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho})$ と $\Gamma'_{\pm}(q^{-\rho})$ はフェルミオンカレントのモード $J_k, k \in \mathbb{Z}$, を
 用いて定義される 2 種類の頂点作用素

$$\Gamma_{\pm}(q^{-\rho}) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k/2} J_{\pm k}}{1 - q^k} \right), \quad \Gamma'_{\pm}(q^{-\rho}) = \exp \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-q)^{k/2} J_{\pm k}}{1 - q^k} \right)$$

である. $\langle {}^t\beta_1 |$ と $| {}^t\beta_2 \rangle$ は ${}^t\beta_1$ と ${}^t\beta_2$ に対応する励起状態を表す.

開弦振幅の母関数（波動関数）

$Z_{\beta_1\beta_2}^{\text{cv}}$ を

$$\beta_1 = (k), (1^k), \quad \beta_2 = \emptyset, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

に特殊化して $Z_{\emptyset\emptyset}^{\text{cv}}$ で正規化したものの母関数

$$\Psi(x) = \frac{1}{Z_{\emptyset\emptyset}^{\text{cv}}} \sum_{k=0}^{\infty} Z_{(1^k)\emptyset}^{\text{cv}} x^k, \quad \tilde{\Psi}(x) = \frac{1}{Z_{\emptyset\emptyset}^{\text{cv}}} \sum_{k=0}^{\infty} Z_{(k)\emptyset}^{\text{cv}} x^k$$

は KP 階層の Baker-Akhiezer 関数（を初期時刻で考えたもの）に相当する。その意味では x はスペクトルパラメータである。これらの関数は以下に示すような q -差分方程式を満たす。以下では $\Psi(x)$ についてのみ結果を説明するが、 $\tilde{\Psi}(x)$ に対しても同様のことが成立する。

定理 2

$\Psi(x)$ は次の q -差分方程式を満たす：

$$\begin{aligned} & (1 - Q_1 Q_2 q^{-2} q^{x\partial_x} - Q_1 q^{1/2} x)(1 - Q_1 Q_2 q^{-1} q^{x\partial_x} - Q_1 Q_2 Q_3 q^{1/2} x) \Psi(qx) \\ & = (1 - Q_1 Q_2 q^{-2} q^{x\partial_x} - q^{1/2} x)(1 - Q_1 Q_2 q^{-1} q^{x\partial_x} - Q_1 Q_3 q^{1/2} x) \Psi(x) \end{aligned}$$

証明の方針

$Z_{\beta_1 \beta_2}^{\text{cv}}$ のフェルミオン表示の $\langle {}^t\beta_1 | \cdots | {}^t\beta_2 \rangle$ の部分に対して上と同様の母関数 $\Phi(x)$ を考える. $\Psi(x)$ と $\Phi(x)$ は次のような関係にある：

The coefficients of the expansion

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad a_k = b_k \prod_{i=1}^k (1 - Q_1 Q_2 q^{i-1})^{-1}$$

証明の方針 (続き)

フェルミオン表示から, $\Phi(x)$ は

$$\Phi(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - Q_1 q^{i-1/2} x)(1 - Q_1 Q_2 Q_3 q^{i-1/2} x)}{(1 - q^{i-1/2} x)(1 - Q_1 Q_3 q^{i-1/2} x)},$$

と表せて (4つの量子ダイログ函数の組合わせになる),

$$\Phi(qx) = \frac{(1 - q^{1/2} x)(1 - Q_1 Q_3 q^{1/2} x)}{(1 - Q_1 q^{1/2} x)(1 - Q_1 Q_2 Q_3 q^{1/2} x)} \Phi(x).$$

という q -差分方程式を満たすことがわかる. これを係数 b_k に対する漸化式に書き直し, それを a_k に対する漸化式に書き直して, 最終的に $\Psi(x)$ に対する方程式を導く. (やや形式的になるが, 差分作用素の無限乗積を用いて, x に関する展開を経由せずに導くこともできる.)

方程式の因子分解

$\Psi(x)$ の方程式を（項を 1 辺に集めて）

$$H(x, q^{x\partial_x})\Psi(x) = 0$$

と表すとき， q -差分作用素 $H(x, q^{x\partial_x})$ は次のように因子分解する．

$$H(x, q^{x\partial_x}) = (1 - Q_1Q_2q^{-2}q^{x\partial_x})K(x, q^{x\partial_x})$$

ここで

$$\begin{aligned} K(x, q^{x\partial_x}) &= (1 - Q_1Q_2q^{-1}q^{x\partial_x})(1 - q^{x\partial_x}) - (1 + Q_1Q_3)q^{1/2}x \\ &\quad + Q_1(1 + Q_2Q_3)q^{1/2}xq^{x\partial_x} + Q_1Q_3qx^2 \end{aligned}$$

このような因子分解は結び目の不変量の \hat{A} -多項式においても知られているが，次に説明するように，今の状況は \hat{A} -多項式とは違っている．

q -差分方程式の簡約形

q -差分方程式

$$(1 - Q_1 Q_2 q^{-2} q^{x\partial_x}) K(x, q^{x\partial_x}) \Psi(x) = 0$$

において $K(x, q^{x\partial_x}) \Psi(x)$ は x の整級数であるが、それに作用する $(1 - Q_1 Q_2 q^{-2} q^{x\partial_x})$ は $Q_1 Q_2$ が **generic** である（すなわち、例外的な値をとらない）限り、整級数の空間において可逆である。これから次のこと（講演予稿を書いた時点では気がつかなかった）がわかる。

定理 3

$Q_1 Q_2$ の値が generic ならば、 $\Psi(x)$ は簡約された方程式 $K(x, q^{x\partial_x}) \Psi(x) = 0$ を満たす。

量子ミラー曲線

q 差分方程式 $K(x, q^{x\partial_x})\Psi(x) = 0$ の $q \rightarrow 1$ における古典極限は

$$K_{cl}(x, y) = (1 - Q_1 Q_2 y)(1 - y) - (1 + Q_1 Q_3)x \\ + Q_1(1 + Q_2 Q_3)xy + Q_1 Q_3 x^2$$

という多項式の定める曲線 $K(x, y) = 0$ である. $K_{cl}(x, y)$ のニュートン図形が冒頭のトーリック図形と同じ形をしているので, これは closed topological vertex のミラー曲線に相当する. その意味で, q 差分方程式 $K(x, q^{x\partial_x})\Psi(x) = 0$ はその量子化, すなわち量子ミラー曲線と解釈される.

このように位相的頂点の方法による開弦振幅の計算から波動函数を経て量子ミラー曲線が導出できることは, strip 上のウェブ図形の場合には知られていたが, 非 strip 図形の場合にはこれがはじめての例になる.