Closed topological vertex の量子ミラー曲線と q-差分型 Kac-Schwarz 作用素

高崎金久（近畿大学）　　中津了勇（摂南大学）

無限可積分系セッション 2016 年 9 月 16 日

closed topological vertex の量子ミラー曲線が q 差分型 Kac-Schwarz 作用素として解釈できることを示す．同様の解釈はコニフォルドをはじめとする strip geometry 上の位相的弦理論の開弦振幅全般にもあてはまる．

Ref: K. T. and T. Nakatsu, q-difference Kac-Schwarz operators in topological string theory, arXiv:1609.00882 [math-ph]

2 次元量子重力理論の Kac-Schwarz 作用素

(a, b) 型弦方程式 $[P, Q] = 1$ (P, Q はそれぞれ階数 a, b の常微分作用素）の解は佐藤グラスマン多様体の点 W に対応する．$W \subset V = \mathbb{C}((z^{-1}))$ とみなせば，W は交換関係 $[A, B] = 1$ を満たす常微分作用素

$$A = \frac{1}{bz^{b-1}} \frac{d}{dz} + z^a + \text{低次の項}, \quad B = z^b$$

の対（Kac-Schwarz 作用素）によって

$$AW \subset W, \quad BW \subset W$$

という条件で特徴付けられる．

(V. Kac and A. Schwarz, Phys. Lett. **B257** (1991), 329–334;
A. Schwarz, Modern Phys. Lett. **A6** (1991), 2713–2725)

Hurwitz 数に対する Kac-Schwarz 作用素の変種

各種の Hurwitz 数の母函数は KP 階層の τ 函数になる．対応するグラスマン多様体の点 $W \subset V = \mathbb{C}((x))$ $(x = z^{-1})$ は交換関係 $[A, B] = B$ を満たす無限階微分作用素の対 A, B によって

$$AW \subset W, \quad BW \subset W$$

という条件で特徴付けられる．さらに，A, B は V 上の可逆な無限階微分作用素 $G = G(x, D)$ $(D = x\frac{d}{dx})$ によって

$$A = -G \cdot D \cdot G^{-1}, \quad B = G \cdot x^{-1} \cdot G^{-1}$$

と表せる．

例（2 重 Hurwitz 数の場合） $G = Q^D e^{\beta(D-1/2)^2} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right)$

Hurwitz 数に対する Kac-Schwarz 作用素の変種（続き）

G は W の基底（admissible basis）$\{\Phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ の生成作用素である．$\Phi_j(x)$ は

$$\Phi_j(x) = Gx^{-j}, \quad j \geq 0$$

と表されて，

$$A\Phi_j(x) = j\Phi_j(x), \quad B\Phi_j(x) = \Phi_{j+1}(x)$$

という方程式を満たす．最低次の方程式 $A\Phi_0(x) = 0$ は Hurwitz 数の量子スペクトル曲線の方程式に一致する．

(A. Alexandrov, Comm. Math. Phys. **338** (2015), 195–249; A. Alexandrov, D. Lewanski and S. Shadrin, arXiv:1512.07026 [math-ph])

位相的弦理論における Kac-Schwarz 作用素の変種

$\mathbb{C}^3$ やコニフォルド（resolved conifold）など，ある種の 3 次元局所トーリックカラビ-ヤウ多様体の上の位相的弦理論の開弦振幅の母函数は KP 階層の τ 函数になる．この場合のグラスマン多様体の点 W の基底 $\{\Phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ の生成作用素 G は q 差分作用素 $G = G(x, q^D)$ $(D = x\frac{d}{dx})$ になる．

$\mathbb{C}^3$ の場合:

$$G = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^{i-1/2}x)^{-1}$$

コニフォルドの場合:（ケーラーパラメータを Q とする）

$$G = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - Qq^{i-1+D})^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^{i-1/2}x)^{-1}$$

位相的弦理論における Kac-Schwarz 作用素の変種（続き）

A, B を

$$A = G \cdot q^{-D} \cdot G^{-1}, \quad B = G \cdot x^{-1} \cdot G^{-1}$$

と定義すれば，A, B は q 差分作用素で，量子トーラス関係式 $AB = qBA$ に従う．$\Phi_j(x) = Gx^{-j}$ は

$$A\Phi_j(x) = q^j \Phi_j(x), \quad B\Phi_j(x) = \Phi_{j+1}(x)$$

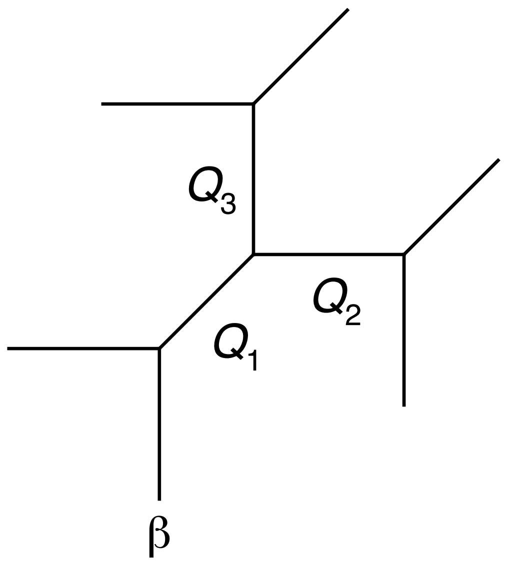
という方程式を満たす．最低次の方程式 $A\Phi_0(x) = \Phi_0(x)$ は位相的弦理論の量子ミラー曲線の方程式に一致する．

コニフォルドの場合:

$$A = q^D(1 - q^{1/2}x(1 - Qq^D)), \quad B = (1 - Qq^D)^{-1} \cdot x^{-1}.$$

(J. Zhou, arXiv:1207.0598 [math.AG])

今回の結果：closed topological vertex の場合



外線の１つに分割 β を指定して得られる開弦振幅 Z_β （を正規化したもの）の母函数 $\tau(\boldsymbol{x}) = \sum_\beta s_{{}^t\beta}(\boldsymbol{x}) Z_\beta / Z_\emptyset$ は KP 階層の τ 函数になる．

1. 生成作用素は次のようになる：

$$G = \prod_{i=1}^{\infty}(1-Q_1Q_2q^{i-1+D}) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1-Q_1q^{i-1/2}x)(1-Q_1Q_2Q_3q^{i-1/2}x)}{(1-q^{i-1/2}x)(1-Q_1q_3q^{i-1/2}x)}.$$

今回の結果：closed topological vertex の場合（続き）

2. A, B は次のようになる：

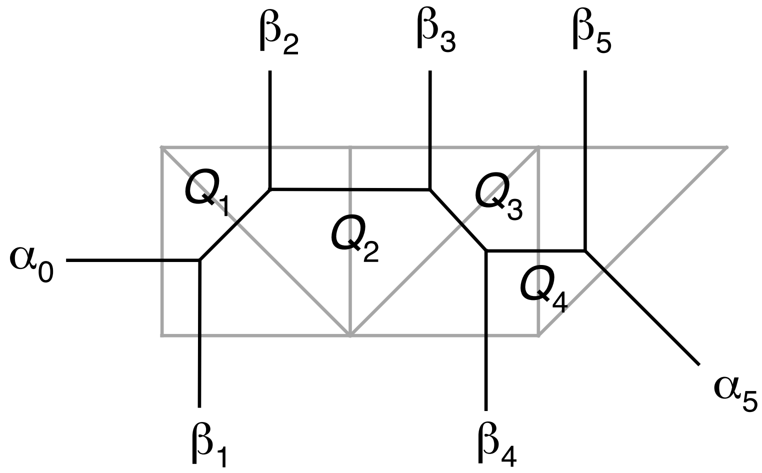
$$
\begin{aligned}
A &= q^{-D} \\
&\times \Big((1 - Q_1 q^{1/2} x (1 - Q_1 Q_2 q^D)^{-1})(1 - Q_1 Q_2 Q_3 q^{1/2} x (1 - Q_1 Q_2 q^D)^{-1}) \Big)^{-1} \\
&\times (1 - q^{1/2} x (1 - Q_1 Q_2 q^D)^{-1})(1 - Q_1 Q_3 q^{1/2} x (1 - Q_1 Q_2 q^D)^{-1}), \\
B &= (1 - Q_1 Q_2 q^D) \cdot x^{-1}.
\end{aligned}
$$

3. A は次の形に書き直せる：

$$
\begin{aligned}
A = q^{-D} & \Big((1 - Q_1 Q_2 q^{D-2} - Q_1 q^{1/2} x)(1 - Q_1 Q_2 q^{D-1} - Q_1 Q_2 Q_3 q^{1/2} x) \Big)^{-1} \\
& \times (1 - Q_1 Q_2 q^{D-2} - q^{1/2} x)(1 - Q_1 Q_2 q^{D-1} - Q_1 Q_3 q^{1/2} x)
\end{aligned}
$$

これから昨年別の方法で得た量子ミラー曲線が復元できる.

今回の結果：strip geometry の場合



n 番目の頂点から出る垂直の外線に分割 β を指定して得られる開弦振幅 $Z_{n,\beta}$ （を正規化したもの）の母函数 $\tau_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{\beta} s_{{}^t\beta}(\boldsymbol{x}) Z_{n,\beta}/Z_{n,\emptyset}$ はKP階層の τ 函数になる．

結果を述べるために，記号を導入する：

$$\sigma_n = \begin{cases} +1 & n \text{ 番目の頂点から出る外線が上向きのとき} \\ -1 & n \text{ 番目の頂点から出る外線が下向きのとき} \end{cases}$$

$$Q_{mn} = Q_m Q_{m+1} \cdots Q_{n-1}$$

今回の結果：strip geometry の場合（続き）

1. 生成作用素は $G = H \cdot \prod_{i=1}^{\infty}(1-q^{i-1/2}x)^{-1}$ と表せる．ここで

$\sigma_n = +1$ のとき

$$H = \prod_{m<n}\prod_{i=1}^{\infty}(1-Q_{mn}q^{i-1+D})^{\sigma_m} \cdot \prod_{m>n}\prod_{i=1}^{\infty}(1-Q_{nm}q^{i-D})^{-\sigma_m}$$

$\sigma_n = -1$ のとき

$$H = \prod_{m<n}\prod_{i=1}^{\infty}(1-Q_{mn}q^{i-D})^{\sigma_m} \cdot \prod_{m>n}\prod_{i=1}^{\infty}(1-Q_{nm}q^{i-1+D})^{-\sigma_m}$$

今回の結果：strip geometry の場合（続き）

2. A, B は次のようになる：

$$A = q^{-D}(1 - q^{1/2}xR), \quad B = (xR)^{-1} = R^{-1} \cdot x^{-1}$$

ここで

$$R = \prod_{m<n} (1 - Q_{mn} q^{\sigma_n D})^{-\sigma_m \sigma_n} \cdot \prod_{m>n} (1 - Q_{nm} q^{-\sigma_n D})^{-\sigma_n \sigma_m}$$

この結果から，以前別の方法で得た量子ミラー曲線が再現できる．