$\mathbb{CP}^1$ の同変Gromov-Witten理論と同変戸田階層

高崎金久　(近畿大学理工学部)

同変戸田階層はリーマン球面 $\mathbb{CP}^1$ の同変 Gromov-Witten (GW) 不変量の母函数を特徴付けるための可積分階層として Getzker によって導入された [1]．Getzler 自身は母函数の種数0部分が同変戸田階層の無分散極限の特殊解であることを示すにとどまったが [2]，Okounkov と Pandharipande は全種数の母函数に対して同変戸田階層との関係を確かめた [3]．彼らは Kontsevich の局所化計算の方法によって同変GW不変量をグラフ展開し，それをフェルミオンの言葉に翻訳して Getzler の主張を確認した．その後，Milanov は Givental の全種数GW不変量再構成法によって Getzler の主張を再確認し [4]，Tseng とともにその結果を $\mathbb{CP}^1$ のオービフォルドに拡張した [5]．本講演では，Okounkov と Pandharipande の方法を振り返り，彼らが "dressing operator" と呼んだものに新たな役割が見出せることを報告する．

同変戸田階層は2次元（2D）戸田階層の簡約系として捉えられる（Milanov と Tseng の論文 [5] の付録を参照されたい）．$\boldsymbol{t} = (t_k)_{k\ge1}$ と $\bar{\boldsymbol{t}} = (\bar{t}_k)_{k\ge1}$ を時間変数，s を空間変数，Λ をシフト作用素 $\Lambda = e^{\partial_s}$（$\partial_s = \partial/\partial s$）とするとき，2D戸田階層の Lax 形式は2つの差分型 Lax 作用素

$$L = \Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \Lambda^{1-n}, \quad \bar{L}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_n \Lambda^{n-1}$$

を用いて定式化される．同変戸田階層は

$\mathbb{C}[h,\nu]$

に関する同変コホモロジーのパラメータ

$$L - \nu \log L = \bar{L}^{-1} - \nu \log \bar{L} - \nu \log Q \tag{1}$$

という簡約条件で特徴付けられる．ここで $\cancel{\nu,}$ Q は同変GW理論のパラメータで，ν は1次元トーラス T の $\mathbb{CP}^1$ への作用を~~定める重み~~である（$H_T^*(\mathbb{CP}^1) \simeq \mathbb{C}[h]/(h(h-\nu))$ が成立する）．$\log L$ と $\log \bar{L}$ は $L = W\Lambda W^{-1}$, $\bar{L} = \bar{W}\Lambda\bar{W}^{-1}$ を満たす dressing operator

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \Lambda^{-n}, \quad \bar{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n \Lambda^n$$

を用いて

$$\log L = W \log \Lambda W^{-1}, \quad \log \bar{L} = \bar{W} \log \Lambda \bar{W}^{-1}, \quad \log \Lambda = \partial_s$$

と定義される．

Okounkov と Pandharipande の dressing operator $V, \bar{V}$ [1]は同変GW不変量のフェルミオン表示の中に登場する．彼らはそれを用いて同不変量の母函数を2D戸田階層の τ 函数

$$\begin{gathered} \tau = \langle s| \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k\right) g \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k J_{-k}\right) |s\rangle, \\ g = V^{-1} e^{J_1} Q^{L_0} e^{J_{-1}} \bar{V}^{-1} \end{gathered} \tag{2}$$

に書き直した．ここで $\{J_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は複素自由フェルミ場に付随するいつもながらの Heisenberg 代数と Virasoro 代数の基底である．これを $W, \bar{W}$ の言葉に翻訳すれば

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \Lambda^k\right) U \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k \Lambda^{-k}\right) = W^{-1}\bar{W} \tag{3}$$

科学研究費 No. 18K03350

[1] 彼らは W, W^* という記号を用いたが，ここでは前述の $W, \bar{W}$ と区別するために $V, \bar{V}$ と表す．

という因子分解問題の解になる．ここで U は

$$U = V^{-1} e^{\Lambda} Q^{H} e^{\Lambda^{-1}} \bar{V}^{-1}, \quad H = s - 1/2$$

という差分作用素である．差分作用素に翻訳された $V, \bar{V}$ （紛らわしいが，同じ記号で表す）は

$$V = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Lambda^{-n}, \quad \bar{V} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \Lambda^{n}$$

という（それぞれ下三角型・上三角型の $\infty \times \infty$ 行列に相当する）形をしている．

Okounkov と Pandharipande の論文はかなり間接的なやり方で $V, \bar{V}$ を導入し，それを用いて同変 GW 不変量の母函数を (2) の形に書き直している．この τ 函数が同変戸田階層の特殊解を与えることは別の論理（同変 GW 理論に基づく）で説明している．結局 $V, \bar{V}$ の正体は Okounkov と Pandharipande の論文からはよくわからない[2]．

ここでは改めて (2) から出発し，$V, \bar{V}$ を

$$\begin{aligned} V(\Lambda - \nu \log \Lambda) V^{-1} &= \Lambda + H - \nu \log \Lambda, \\ \bar{V}^{-1}(\Lambda^{-1} - \nu \log \Lambda) \bar{V} &= \Lambda^{-1} + H - \nu \log \Lambda \end{aligned} \tag{4}$$

という条件（Okounkov と Pandharipande の考察や最近の論文 [6] から読み取れる）を満たす差分作用素として捉え直す．このような差分作用素（一意的ではない）は ν に関するべき級数展開 $V = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k V^{(k)}$, $\bar{V} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \bar{V}^{(k)}$ の形で直接的に構成できる．これに基づいて次のことが証明できる．

定理　因子分解問題 (3) によって $W, \bar{W}$ を定めれば，

$$W(\Lambda - \nu \log \Lambda) W^{-1} = \bar{W}(\Lambda^{-1} - \nu \log \Lambda) \bar{W}^{-1} - \nu \log Q \tag{5}$$

という等式が成立し，対応する $L, \bar{L}$ は同変戸田階層への簡約条件 (1) を満たす．

証明の方針　簡約条件 (1) は時間発展で保たれるので，初期時刻 $\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$ で成立することを示せば十分である．それを示すには (5) が初期時刻において成立することを確かめればよい．$W, \bar{W}$ の初期値は因子分解問題 (3) （初期時刻では具体的に解ける）から読み取れる．それを用いて計算すれば，初期時刻で (5) が成立することがわかる．

参考文献

[1] E. Getzler, The equivariant Toda latice, Publ. RIMS, Kyoto University, **40** (2004), 507–534.

[2] E. Getzler, The equivariant Toda conjecture, arXiv:math/0207025.

[3] A. Okounkov and R. Pandharipande, The equivariant Gromov-Witten theory of $\mathbf{P}^1$, Ann. Math. **163**, (2006), 561–605.

[4] T. E. Milanov, The equivariant Gromov-Witten theory of $\mathbb{C}P^1$ and integrable hierarchies, Int. Math. Res. Not. (2008), rnn 073, 21 pp.

[5] T. E. Milanov and H. H. Tseng, Equivariant orbifold structures on the projective line and integrable hierarchies, Adv. Math. **226** (2011), 641–672. arXiv:0707.3172.

[6] A. Oblomkov, A. Okounkov and R. Pandharipande, GW/PT descendent correspondence via vertex operators, arXiv:1806.0071.

[2] そもそもこの論文にはいくつかのつじつまの合わない記述が目に付く．例えば，論文は V を上三角型，$\bar{V}$ を下三角型に選ぶと言っているが，これは論文が要求するもう一組の条件 $\langle s|V = \langle s|$, $\bar{V}|s\rangle = |s\rangle$ と矛盾するように思われる．後の論文 [6] にも同様の記述がある．ことによると，上三角・下三角の定義が我々と違うのかもしれない．