Liouville 平面上の散乱問題と
複素 WKB 法の厳密な接続公式 (II)

高崎金久　　京大教養部

前回は２階の Sturm-Liouville 方程式

$$\psi_{zz} = (\zeta^2 f(z) + g(z))\psi \quad (\zeta > 0) \tag{1}$$

に Olver の方法の一つを適用し，Ecale-Voros の理論との関連を指摘した.（但し，簡単のため $f(z)$ は多項式で $g(z) = 0$ である，と仮定した.）その骨子は，通常多く用いられるような turnging point つまり $f(z)$ の零点の近傍における解析（“簡単化された方程式” との漸近的比較による）とは対照的に，turning point の外（特に無限遠点）での解析から接続係数を読み取るものであった.

実は turning point の中に重複度が１より大きいもの（つまり f の重根）があるとこの方法では一般には接続係数が完全に決定できない．また，２つの turning point が合流する様子を追跡することも難しい．ここでは，前回の方法の考え方を生かしつつ，そのような場合を扱うための一つのアイディアを紹介する.

基本的な考え方は，z-平面上の中立的な路 (neutral path) に沿って解の無限遠での漸近的な振舞いを調べよう，ということである．ここで “中立的” とは，Liouville 変数

$$s(z) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{z_0}^{z} f(z')^{1/2} dz' \tag{2}$$

の実部が一定であること（あるいは少し弱くして，有界な範囲を動くこと）をいう．前回の方法は前進的な路 (progressive path)，つまり $s(z)$ の実部が単調増加あるいは減少するような路，に沿って解の振舞いを調べるものだった．典型的には，s-平面で虚軸に平行な直線は中立的，実軸に平行な直線は前進的である.

(1) は Liouville 変換 $\psi(z,\zeta) = f^{-1/4}\phi(s,\zeta)$ によって “Schr̈dinger 方程式”

$$\phi_{ss} = (\zeta^2 + u(s))\phi \tag{3}$$

にうつり，現れるポテンシャル $u(s)$ は s-平面の無限遠点で $|s|^{-2}$ のオーダーで減少する．従って s-平面で見るとき，解は無限前進路の両端において

$$\phi \sim c_+ \exp(s\zeta) + c_- \exp(-s\zeta) \tag{4}$$

というように指数的に振舞う．右辺で指数的に大きくなる（いわゆる優勢，dominant，な）部分の係数は容易に取り出せる．勿論これでは指数的に小さい（劣勢，recessive, な）部分は埋もれてしまって直接には見えない．しかしながらいろいろな無限遠方の振舞いを見比べることによってこの見えない部分も決定できる，というのが前回の方法の基本的な考え方だった．

無限前進路のかわりに無限中立路の上で (3) を考えると，本来の散乱理論の設定と同じになる．解の振舞い (4) は振動的になり，散乱理論の処法に従ってその係数を両方とも見ることが出来るようになる．これら 2 種類の係数をうまく使い分けることで，turning point が合流する状況でも有効性を失わない接続係数の解析的な表示ができる，というのが今回の主張である．

具体的には，s-平面上の中立路に沿っていくつかの解の組 $\phi_j(s,\zeta)$ をとり，Wronskian

$$W[\phi_j,\phi_k] \underset{\mathrm{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \phi_j & \phi_k \\ \phi_{j,s} & \phi_{k,s} \end{pmatrix} \tag{5}$$

の反復積分級数表示を与えて解析を行う．z-平面上の対応する Wronskian はこれらと簡単な関係で結ばれている．接続問題を解くことはこれらの Wronskian を求めることと同じである．前回の結果もこの立場から見直せる．

最後に，応用について触れておく．多重の turning point や turning point の合流を伴う問題は応用上しばしば現れる．応用上はむしろ 2×2 行列係数をもつ 1 階連立系

$$\begin{aligned} &\Psi_z = (\zeta L(z) + M(z))\Psi, \quad \operatorname{tr} L(z) = 0, \\ &\Psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

を考えることの方が多い．この場合も

$$f(z) = \det L(z), \quad \Psi(z,\zeta) = G(z)\Phi(s,\zeta) \tag{7}$$

（$G(z)$ は適当に選んだ 2×2 行列）として Liouville 変換がつくれて，方程式 (6) は s-平面上の “Dirac 方程式”

$$\Phi_s = \begin{pmatrix} \zeta & q(s) \\ r(s) & -\zeta \end{pmatrix} \Phi \tag{8}$$

に移る．このような “Dirac” 型の方程式に対しても散乱理論が知られている．それを利用することで (6) に対する WKB 接続問題が扱える．(6) の形の線型系は Painlevé 方程式などへの応用があり，重要である．