SDiff(2)-戸田方程式の Lax 形式と無限小対称性の構成

高崎金久　　　京大教養部

SDiff(2)-戸田方程式とここで呼ぶのは 3 個の独立変数 $(z, \bar{z}, s)$ をもつ次のような 2 階の非線型偏微分方程式のことである．

$$u_{z\bar{z}} + (\exp u_s)_s = 0, \quad u = u(z, \bar{z}, s). \tag{1}$$

例のごとく $u_{z\bar{z}} = \partial^2 u/\partial z \partial \bar{z}$, etc. 通常の 2 次元戸田方程式

$$u(s)_{z\bar{z}} + e^{u(s+1)-u(s)} - e^{u(s)-u(s-1)} = 0 \tag{2}$$

では s は整数値をとる離散変数（格子上の座標をあらわす）であるが，上の方程式は s と u を適当に rescale して連続化したもの（s はそこでは連続変数に変わる）と解釈される．このような類推から前者に対する Lax 形式を導くことができる．Lax 形式には 2 次元の面積保存微分自己同型（いいかえれば 2 次元の正準変換）の Lie 代数（それを物理での慣用に従って一般的に SDiff(2) と書く）が現れる．ここではこの Lax 形式に基づいて補助函数を導入し，それを使って無限小対称性の具体的な構成を与える．

非線型積分可能系の理論と同様にここでもスペクトルパラメータと呼ばれるパラメータ λ を導入する．(λ, s) の函数に対して次のように Poisson 括弧を定義する．

$$\{F, G\} \underset{\mathrm{def}}{=} \lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial G}{\partial s} - \lambda \frac{\partial G}{\partial \lambda}\frac{\partial F}{\partial s}. \tag{3}$$

F, G としては例えば s の函数を係数に持つ λ の Laurent 級数を想定している．さてここで

$$b(\lambda) \underset{\mathrm{def}}{=} \lambda + u_z, \quad c(\lambda) \underset{\mathrm{def}}{=} \exp(u_s)\lambda^{-1} \tag{4}$$

を導入すると，(1) に対する Lax 表示（あるいは “零曲率表示”）

$$b(\lambda)_{\bar{z}} - c(\lambda)_z + \{b(\lambda), c(\lambda)\} = 0 \tag{5}$$

を得る．これに付随する“線型問題”の対応物は次のようになる．

$$w(\lambda)_z - \{b(\lambda), w(\lambda)\} = 0, \quad w(\lambda)_{\bar{z}} - \{c(\lambda), w(\lambda)\} = 0. \tag{6}$$

無限小対称性の構成にはこの線型問題 (6) の Laurent 級数解の組

$$w^0(\lambda) = \lambda + \sum_{n\le 0} w_n^0 \lambda^n, \quad w^1(\lambda) = z\lambda + \sum_{n\le 0} w_n^1 \lambda^n,$$
$$\hat{w}^0(\lambda) = \sum_{n\ge 1} \hat{w}_n^0 \lambda^n, \quad \hat{w}^1(\lambda) = \sum_{n\ge -1} \hat{w}_n^1 \lambda^n,$$

で Poisson 交換関係

$$\{w^0(\lambda), w^1(\lambda)\} = w^0(\lambda), \quad \{\hat{w}^0(\lambda), \hat{w}^1(\lambda)\} = \hat{w}^0(\lambda) \tag{7}$$

を満たすものを用いる．（ちなみに，Laurent 係数の最初の方は u を使って具体的に書ける．また，これら４個の解から twistor との関連も説明できる．無限小変換は twistor の構造から導かれる.）無限小変換のデータとして２個の２変数函数 $F = F(w^0, w^1)$, $\hat{F} = \hat{F}(\hat{w}^0, \hat{w}^1)$ を与える．このとき，次のようにして $w^i(\lambda), \hat{w}^i(\lambda)$ と u の生成する微分代数の上に微分 $\delta_{F,\hat{F}}$ を定義する．

$$\begin{aligned}
&\delta_{F,\hat{F}} w^i(\lambda) = \{F(w(\lambda))_{\le -1} - \hat{F}(\hat{w}(\lambda))_{\le -1}, w^i(\lambda)\},\\
&\delta_{F,\hat{F}} \hat{w}^i(\lambda) = \{\hat{F}(\hat{w}(\lambda))_{\ge 0} - F(w(\lambda))_{\ge 0}, \hat{w}^i(\lambda)\},\\
&\delta_{F,\hat{F}} u = \hat{F}(\hat{w}(\lambda))_0 - F(w(\lambda))_0,\\
&\delta_{F,\hat{F}} \lambda = \delta_{F,\hat{F}} s = \delta_{F,\hat{F}} z = \delta_{F,\hat{F}} \bar{z} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

ただし，$(\ldots)_{\le -1}, (\ldots)_{\ge 0}, (\ldots)_0$ は与えられた Laurent 級数から添字に示された指数の範囲の巾を取り出す射影演算子をあらわす.

［定理］この $\delta_{F,\hat{F}}$ は SDiff(2)-戸田方程式の無限小対称性を与える．

最近 Krichever の“準古典的 KP ヒエラルヒー”など SDiff(2) に関連した非線型方程式がいくつか議論されているが，上の結果はそのような場合にも拡張される．また，このような対称性代数を利用することで，KP ヒエラルヒーの理論の場合のように，特殊解を分類したり幾何学的な意味付けを与えたりすることができるのではないかと思われる．