KP hierarchy の準古典近似と $W_{1+\infty}$ 対称性の縮約

高崎金久　　京都大学総合人間学部

通常の KP hierarchy に対して準古典版 KP hierarchy は擬微分作用素の Lax operator L を Laurent 級数

$$\mathcal{L} = k + \sum_{n=1}^{\infty} g_{n+1} k^{-n} \tag{1}$$

に，Lax 方程式の交換子を Poisson 括弧

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial k} \tag{2}$$

に，それぞれ置き換えた形

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\}, \quad \mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n)_{\geq 0} \tag{3}$$

（$(\quad)_{\geq 0}$ は k の負巾部分を捨てることを意味する）をしている．この方程式系は KP hierarchy に Planck 定数 $\hbar$ をいれて（それに伴い Baker-Akhiezer 函数の準古典近似 – WKB 近似– が現れる）準古典極限をとったものと見ることができる．このとき KP hierarchy の τ 函数 $\tau(\hbar, t)$ と準古典版 KP hierarchy の自由エネルギー $F(t) = \log \tau_{q.c.}(t)$ とは

$$\tau(\hbar, t) = \exp[\hbar^{-2} F(t) + O(\hbar^{-1})] \tag{4}$$

という関係により結ばれている．

この講演で紹介するのは KP hierarchy の頂点作用素に対する同様の準古典近似の処方である．これにより KP hierarchy の $W_{1+\infty}$ 対称性が準古典版方程式の $w_{1+\infty}$ 対称性へ “縮約” される様子が τ 函数のレベルで具体的にわかる．

KP hierarchy の頂点作用素は τ 函数に作用して KP hierarchy

の無限小対称性の２パラメータ族を与える線形作用素で,

$$Z(\tilde{\lambda},\lambda)=\frac{1}{\tilde{\lambda}-\lambda}\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_n(\tilde{\lambda}^n-\lambda^n)\right)\right.$$
$$\left.\cdot\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\tilde{\lambda}^{-n}-\lambda^{-n})}{n}\frac{\partial}{\partial t_n}\right)-1\right]. \qquad (5)$$

という形をしている．これを $\tilde{\lambda}\to\lambda$ で Taylor 展開し，さらに λ で Laurent 展開すること：

$$Z(\tilde{\lambda},\lambda)=\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(\tilde{\lambda}-\lambda)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}Z^{(\ell)}(\lambda),\quad Z^{(\ell)}(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}W_n^{(\ell)}\lambda^{-n-\ell} \qquad (6)$$

により $W_{1+\infty}$ 対称性の生成系 $W_n^{(\ell)}$ を得る．ここでさらに変数 t_n 達の rescaling

$$t_n\to\hbar^{-1}t_n,\quad \partial/\partial t_n\to\hbar\partial/\partial t_n \qquad (7)$$

を行ったものを $W_n^{(\ell)}(\hbar)$ と書くと，これは $\hbar$ をいれた KP hierarchy の $W_{1+\infty}$ 対称性を与える．以上の設定のもとで次のことがわかる．

(i) $\partial/\partial t_n$ について $F(t)$ の生成する微分代数の上に

$$w^{(\ell)}F=\lim_{\hbar\to 0}\tau(\hbar,t)^{-1}\hbar^{\ell}W_n^{(\ell)}(\hbar)\tau(\hbar,t) \qquad (8)$$

により新たな微分 $w_n^{(\ell)}$ を定義できる．これらは準古典版 KP hierarchy の $w_{1+\infty}$ 対称性の生成系を与える．それらの満たす交換関係は $k^{n+\ell-1}x^{\ell-1}$ の満たす Poisson 代数の１次元中心拡大に従う．

(ii) 頂点作用素の準古典極限を Fermion ２次形式を用いて説明することもできる．

自己双対重力の可積分変形と
体積保存微分同型の群

高崎金久　　　京都大学総合人間学部

Ricci 平坦な Kähler 幾何学は “自己双対重力” の名で近年物理学者にも親しまれるようになっている．ここではその可積分性を保つ変形の一族としてスカラー平坦な Kähler 幾何学を議論する．

Ricci 平坦性 ($R_{ij} = 0$) は Kähler 函数 Ω に対する Monge-Ampère 型微分方程式（物理学者が Plebanski 方程式と呼ぶもの）

$$\Omega_{,p\hat{p}}\Omega_{,q\hat{q}} - \Omega_{,p\hat{q}}\Omega_{,q\hat{p}} = 1 \tag{1}$$

に帰着する．

同様にしてスカラー平坦性 ($R = 0$) の条件は

$$\Omega_{,p\hat{p}}(\log D)_{,q\hat{q}} - \Omega_{,p\hat{q}}(\log D)_{,q\hat{p}} - \Omega_{,q\hat{p}}(\log D)_{,p\hat{q}} + \Omega_{,q\hat{q}}(\log D)_{,p\hat{p}} = 0 \tag{2}$$

になる．ここで

$$D \underset{\mathrm{def}}{=} \Omega_{,p\hat{p}}\Omega_{,q\hat{q}} - \Omega_{,p\hat{q}}\Omega_{,q\hat{p}}. \tag{3}$$

$D = 1$（つまり Plebanski 方程式）のもとではこの方程式は明らかに満たされているから，これは確かに自己双対重力の拡張を与える．この幾何学は物理学者 Flaherty が自己双対重力の理論に電磁場を取り込むために考えたもので，電磁場の形態はやや特殊であるが，電磁場のエネルギー・運動量テンソルが Einstein 方程式の右辺に消えずに現れる（つまり電磁場から重力場への反作用がある）という点に面白さがある．

可積分性を考える手掛かりとして物理学者の Park が注意したのは，この方程式が

$$L_1 w = 0, \quad L_2 w = 0 \tag{4}$$

（L_1, L_2 は $(\lambda, p, q, \hat{p}, \hat{q})$ 空間上の vector field で，係数に Ω の微分多項式を含む）という形の線型系の Frobenius 可積分条件とみなせるという事実である．これは実は twistor 空間の存在を意味している．実際，スカラー平坦 Kähler 幾何学は共形的自己双対計量 $(*W = W)$ の特別な場合であり，従って Penrose にならって twistor の方法が適用できる．問題は，スカラー平坦 Kähler 幾何学を特徴づける twistor 空間上の付加構造は何か？ということである．

この問題に対して一つの答えを与える．残念ながら幾何学的に intrinsic な言葉で定式化することがまだ出来ていない（知られているのかも知れない）が，twitstor 空間上の特別な座標の言葉で解析的に説明すると，以下のようになる：

(i) Park の線型系は函数的に独立な３個の解の組（基本解系）で λ に関する解析性の異なるものを２組もつ．それをそれぞれ $(\mathcal{L}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$, $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{U}}, \hat{\mathcal{V}})$ と書く．これらをうまく選ぶと

$$\mathcal{L}^{-2} d\mathcal{L} \wedge d\mathcal{U} \wedge d\mathcal{V} = \hat{\mathcal{L}}^{-2} d\hat{\mathcal{L}} \wedge d\hat{\mathcal{U}} \wedge d\hat{\mathcal{V}} \tag{5}$$

という関係式が満たされる．

(ii) それゆえこれら２組の基本解系は体積保存微分同型を変換函数とする函数関係

$$\hat{\mathcal{L}} = f_0(\mathcal{L}, \mathcal{U}, \mathcal{V}),\ \hat{\mathcal{U}} = f_1(\mathcal{L}, \mathcal{U}, \mathcal{V}),\ \hat{\mathcal{V}} = f_2(\mathcal{L}, \mathcal{U}, \mathcal{V}) \tag{6}$$

で結ばれている．これは非線型の Riemann-Hilbert 問題とみなすことができ，逆にそれが解ければ方程式 (2) の（局所）解が得られる．このように，(2) を特徴付けるのは twistor 空間上のある体積形式とそれを不変に保つ微分同型の群（擬群）である．

(iii) (1) の場合と同様，ここで現れる変換函数はすこし“ひねって”やると，twistor 空間の２つの局所座標系の貼り合わせ函数になる．(1) の場合には $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}} = \lambda$ であり，従って変換函数は λ をパラメータにもつ面積保存微分同型になる．