KP hierarchy の準古典近似と $W_{1+\infty}$ 対称性の縮約

京大総合人間学部 高崎金久
(教養部改め)

(東大数理科学研究科 武部尚志氏
との共同研究に基く)

問題

$$\text{KP hierarchy} \xrightarrow{\boxed{\hbar \to 0}} \text{無分散 KP hierarchy}$$

- tau 函数 $\longrightarrow$
- 頂点作用素 $\longrightarrow$?
- 自由フェルミ場 $\longrightarrow$

$\hbar$を入れたKP hierarchy

$$\hbar \frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L] \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$L = \hbar\partial_x + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}(\hbar, x, t)(\hbar\partial_x)^{-n}$$

$$B_n = (L^n)_{\geq 0} \quad (\partial_x^0, \partial_x^1, \partial_x^2, \cdots の部分)$$

$\hbar \longrightarrow 0$ 準古典極限

無分散KP hierarchy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\}, \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\mathcal{L} = k + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}(x,t) k^{-n}$$

$$\mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n)_{\geq 0} \quad (k^0, k^1, k^2, \cdots の部分)$$

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial k} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Poisson}\\ \text{括弧}\end{array}\right)$$

tau函数の漸近形

$$\tau(\hbar, t) = \exp\left[\hbar^{-2} F(t) + O(\hbar^{-1})\right]$$

$F(t) = \log \tau_{dKP}(t)$: 無分散 KP hierarchy の自由エネルギー

頂点作用素

$$Z(\hbar, \tilde{\lambda}, \lambda) = \frac{1}{\tilde{\lambda} - \lambda} \times$$

$$\times \left[\exp \hbar^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n (\tilde{\lambda}^n - \lambda^n) \right) \cdot \exp \hbar \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}^{-n} - \lambda^{-n}}{n} \frac{\partial}{\partial t_n} \right) - 1 \right].$$

① KPの無限小対称性: $\tau \to \tau + \varepsilon Z \tau$ を与える

② $Z(\hbar, \tilde{\lambda}, \lambda) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\lambda} - \lambda)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} W^{(\ell)}(\hbar, \lambda)$,

$W^{(\ell)}(\hbar, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^{(\ell)}(\hbar) \lambda^{-n-\ell}$

と展開するとき, $\{ W_n^{(\ell)} \mid \ell \geq 1, n \in \mathbb{Z} \}$ は

$W_{1+\infty}$ 代数 (~ Ps Diff Op + 中心拡大) に従う

rescaling

$t_n \to \hbar^{-1} t_n$

$\frac{\partial}{\partial t_n} \to \hbar \frac{\partial}{\partial t_n}$

無分散 KP hierarchy の $W_{1+\infty}$ 対称性

$$w_n^{(\ell)} F = \lim_{\hbar\to 0} \tau(\hbar,t)^{-1} \hbar^{\ell} W_n^{(\ell)}(\hbar)\, \tau(\hbar,t)$$

① 無分散 KP の無限小対称性：$F \to F + \varepsilon w_n^{(\ell)} F$
を与える

② $\{ w_n^{(\ell)} \mid \ell \geq 1,\ n \in \mathbb{Z} \}$ の交換関係は $W_{1+\infty}$ 代数
(〜 Poisson 代数 ＋ 中心拡大) に従う.

自由フェルミ場

$$\psi(\lambda) = \sum \psi_i \lambda^i, \quad \psi^*(\lambda) = \sum \psi_i^* \lambda^{-i-1}$$

Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa fermion

$$\tau(\hbar,t) = \langle 0 | e^{\hbar^{-1} H(t)} g(\hbar) | 0 \rangle,$$

$$g(\hbar) = \exp \hbar^{-1} \oint :A(\lambda, \hbar\tfrac{\partial}{\partial\lambda}) \psi(\lambda)\cdot\psi^*(\lambda): d\lambda$$

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n H_n, \quad H_n = :\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_{i+n}^*:$$