I. Moyal代数による自己双対重力の可積分変形

京都大学総合人間学部　高崎金久

自己双対重力

$$\boxed{\frac{\partial^2\Omega}{\partial p\partial\hat{p}}\frac{\partial^2\Omega}{\partial q\partial\hat{q}}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial p\partial\hat{q}}\frac{\partial^2\Omega}{\partial q\partial\hat{p}}=1}$$

Poisson bracket

$$\{F,G\}=\frac{\partial F}{\partial\hat{p}}\frac{\partial G}{\partial\hat{q}}-\frac{\partial F}{\partial\hat{q}}\frac{\partial G}{\partial\hat{p}}$$

を使うと

$$\boxed{\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial p},\frac{\partial\Omega}{\partial q}\right\}=1}$$

"量子変形"

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \{\ ,\ \} & \longrightarrow & \{\ ,\ \}_\hbar \\ \text{Poisson} & & \text{Moyal} \end{array}}$$

$$\{F, G\}_\hbar = \frac{2}{\hbar} \sinh\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{p}\,\partial\hat{q}'} - \frac{\partial^2}{\partial\hat{q}\,\partial\hat{p}'}\right)\right] \cdot F(\hat{p}, \hat{q})\, G(\hat{p}', \hat{q}')\Big|_{\hat{p}'=\hat{p},\, \hat{q}'=\hat{q}}$$

(Moyal bracket)

$$\{F, G\}_\hbar = \frac{1}{\hbar}\left(F * G - G * F\right),$$

$F * G$: Weyl ordering における symbol の合成則

自己双対重力のMoyal代数的"変形"

(I.A.B. Strachan 1992)

$$\boxed{\left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial p}, \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right\}_{\hbar} = 1}$$

問題 この方程式は"可積分"か?

(いかなる意味において?)

解答

- 自己双対重力と同様の取扱いができる. (<u>Lax表示, 零曲率表示</u>)

  $\updownarrow$

  twistor理論(の非可換化)

- "<u>dressing operator</u>"の対応物がある. $\updownarrow$ $(W, \hat{W})$

  KP, 戸田 hierarchy に似ている.

$\boxed{\text{KP}}$

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-n}$$ (擬微分)

$\boxed{\text{戸田}}$

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \, e^{-n\partial/\partial s}$$

$$\hat{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{w}_n \, e^{n\partial/\partial s}$$ (差分)

$\boxed{\text{Moyal代数的自己双対重力}}$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \lambda^{-n}$$

$$\hat{W} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_n \lambda^{n}$$

非可換
結合代数

λ: パラメータ

$w_n, \hat{w}_n$: Moyal代数（*積代数）の要素.

93-03-26

L5

II. Moyal代数に係数をもつ非可換KP hierarchy

N成分KP hierarchy：

- $W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-n}$,

  $w_n = w_n(t, x)$: N×N 行列値

- Lax operator $L, \cdots$ ⎫ 同様
  B-operator $\cdots$ ⎭

問題　$N \to \infty$ とすると何が起こるか？

ヒント（物理学者からの）

$$gl(N) \xrightarrow[N\to\infty]{} \begin{cases} \text{Poisson 代数} \\ \text{Moyal 代数} \end{cases}$$

直接に $N=\infty$ 極限をつくる

93-03-26
16

① $$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\hbar, t, x, y, z)\left(\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-n}$$

w_n は (y, z) に関する Moyal 代数（$*$積代数）に値をとるものとする：

非可換結合代数

$$F * G = \exp\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z'} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y'}\right)\right]$$

$$\cdot F(y, z)\, G(y', z')\Big|_{y'=y,\, z'=z}$$

② hierarchy のえらび方は少くとも二通り可能

- 可換な flow — N 成分 KP の自然な拡張
- 非可換な flow — (Moyal 代数的) 自己双対重力を特殊解として含む.

可換な flow の場合

N成分KP　　時間変数 $t_{n\alpha}$ $\left(\begin{array}{l} n=1,2,\cdots \\ \alpha=1,\cdots,N \end{array}\right)$

$$\frac{\partial W}{\partial t_{n\alpha}} = -\left(W\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n E_\alpha\cdot W^{-1}\right)_{\leq -1} W,$$

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} (\alpha \quad (\alpha = 1\cdots N)$$

$(\ )_{\leq -1}$ ： $\frac{\partial}{\partial x}$の負巾をとり出す．

Moyal代数係数KP　　$t_{n\alpha}$ $\left(\begin{array}{l} n=1,2,\cdots \\ \alpha=0,1,2,\cdots \end{array}\right)$ (0)

$$\hbar\frac{\partial W}{\partial t_{n\alpha}} = -\left(W * \left(\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^n y^\alpha * W^{-1}\right)_{\leq -1} * W,$$

$$\left(f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n * g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k} f * \frac{\partial^k g}{\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+m-k} \right)$$

注 $\hbar$を上のように入れておく方が統一的．(余稿では抜けています．)

非可換なflow

$t_{n\alpha},\ (\hbar\frac{\partial}{\partial x})^n y^\alpha \longrightarrow\ t_n,\ p_n,\ q_n$

$\updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow$

$(\hbar\frac{\partial}{\partial x})^n,\ (\hbar\frac{\partial}{\partial x})^n y,\ (\hbar\frac{\partial}{\partial y})^n z$

$\boxed{\frac{\partial w_n}{\partial x}=0}$ の下で, $\boxed{\hbar\frac{\partial}{\partial x}\rightarrow\lambda}$ おきかえ

→ 自己双対重力

準古典極限

$\hbar\rightarrow 0$

$\{\ ,\ \}_\hbar \longrightarrow \{\ ,\ \}$ 4次元の Poisson bracket

$(\hbar\frac{\partial}{\partial x},x,y,z) \longrightarrow (k,x,y,z)$

$dk\wedge dx + dy\wedge dz$

⇒ 無分散 KP hierarchy の高次元化が得られる.
(自己双対重力を特殊解として含む.)