æ

高次元可積分ヒエラルヒーの τ 函数

高崎金久　　　京都大学総合人間学部

今年春の学会では Moyal 代数を用いる高次元可積分ヒエラルヒーの構成について報告した．今回はトーラス上の Moyal 代数から構成されるヒエラルヒーに対して τ 函数を定義する．

１．簡単のため２次元トーラスを考える．$\theta = (\theta_1, \theta_2)$ をその上の角変数，$z = (z_1, z_2) = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ を対応する Laurent 変数とする．トーラス上の函数（つまり周期 2π の二重周期函数）$f(\theta), g(\theta)$ に対して

$$f * g = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2'} - \frac{\partial^2}{\partial\theta_2\partial\theta_1'}\right)\right] f(\theta_1, \theta_2) g(\theta_1', \theta_2')\Big|_{\theta_1'=\theta_1, \theta_2'=\theta_2}$$

により結合律をみたす積 (star-product) が定義できる．Moyal 括弧はその交換子（を再正規化したもの）である．

２．このような Moyal 代数の場合も，可積分ヒエラルヒーの構成は前回の平面上の Moyal 代数と同様である．ここでは通常の多成分ＫＰヒエラルヒーの拡張にあたる commuting flow の組を考える．構成の基礎となるのは dressing operator と呼ばれる

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n (\hbar\partial_x)^{-n}, \quad w_n = w_n(\hbar, t, \theta, x),\ \partial_x = \partial/\partial x$$

という形の Moyal 代数係数擬微分作用素である．擬微分作用素の係数の間の代数的演算は star-product として扱う．そのことを強調す

るために２つの擬微分作用素 P, Q の積を $P * Q$ と書く．時間変数は $t=(t_{n\alpha})$, $n=0,1,2,\dots$, $\alpha=0,\pm1,\pm2,\dots$ という組からなる．

３．W を使うとこの可積分ヒエラルヒーは

$$\hbar\frac{\partial W}{\partial t_{n\alpha}} = -\big(W*(\hbar\partial_x)z_1^\alpha * W^{-1}\big)_{\le -1} * W$$

という微分方程式系で書ける．ここで $(\quad)_{\le -1}$ は $\hbar\partial_x$ の負巾部分への射影である．Lax 方程式系や Zakharov-Shabat（零曲率）方程式系もここから得られる．

４．τ 函数の定義の鍵となるのは trace 汎函数

$$\operatorname*{tr}_\theta f(\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2}$$

の存在である．実際，これは $\operatorname{tr}_\theta(1)=1$, $\operatorname{tr}_\theta(f*g)=\operatorname{tr}_\theta(g*f)$ $(=\operatorname{tr}_\theta(fg))$ という性質をもち，確かに Moyal 代数の上の trace と解釈できる．

５．主結果．１）$\log\tau$ に対する次の方程式系は Frobenius 可積分条件を満たす．

$$\hbar\frac{\partial\log\tau}{\partial t_{n\alpha}} = \operatorname*{res}_\lambda \operatorname*{tr}_\theta \lambda^n z_1^\alpha * W(\lambda)^{-1} * \left(\frac{\partial W(\lambda)}{\partial\lambda} - \sum_{k=1}^\infty \lambda^{-k-1}\hbar\frac{\partial W(\lambda)}{\partial t_{k0}}\right),$$
$$\hbar\frac{\partial\log\tau}{\partial x} = \hbar\frac{\partial\log\tau}{\partial t_{10}},$$

ただしここで $W(\lambda)=1+\sum_{n=1}^\infty w_n\lambda^{-n}$ とおいた．こうして $\tau=\tau(\hbar,t,x)$ が（定数倍の不定性を除き）この方程式の解として定義される．

２）$\hbar\to 0$ の極限（古典極限）において　Poisson bracket で記述される可積分ヒエラルヒーが得られる．また τ 函数は $\log\tau = \hbar^{-2}F(t,x)+O(\hbar^{-1})$ と振舞う．函数 F（自由エネルギー）を $\log\tau$ と同様に微分方程式系で特徴づけることもできる．