93-09-29

KP hierarchyの拡張

- KP hierarchy

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \partial_x^{-n} \quad \left(\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$L = \partial_x + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} \partial_x^{-n}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = -(W \partial_x^n W^{-1})_{\leq -1} W,$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [\,(L^n)_{\geq 0}, L\,]$$

w_n, u_n : (t, x)の<u>スカラー値</u>函数

- 多成分KP hierarchy

w_n, u_n : $N \times N$ <u>行列</u>値函数

- Moyal代数係数 高次元hierarchy

w_n, u_n : <u>Moyal代数 (star積代数)</u>

に値をとる

93-09-29

Torus上のMoyal代数(2変数)

$$\theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$$

$$z = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$$

torus上の函数のstar積 ($\hbar$は形式的変数)

$$\boxed{f * g(\hbar, \theta) = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2'} - \frac{\partial^2}{\partial\theta_2\partial\theta_1'}\right)\right] f(\hbar, \theta)\, g(\hbar, \theta')\Big|_{\theta=\theta'}}$$

- 結合律をみたす.(Weyl symbolの合成則に他ならない.)
- Moyal bracket $\xrightarrow{\text{古典極限}}$ Poisson bracket

$$\{f, g\}_\hbar = \frac{2}{i\hbar}(f * g - g * f) \underset{\hbar \to 0}{\longrightarrow} \{f, g\}$$

- traceの存在

$$\boxed{\operatorname*{tr}_\theta f = \int \frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2} f(\hbar, \theta)}$$

$$\operatorname*{tr}_\theta 1 = 1, \quad \operatorname*{tr}_\theta f * g = \operatorname*{tr}_\theta g * f$$

93-09-29

Torus上のMoyal代数に係数をもつhierarchy

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \, (i\hbar \partial_x)^{-n}$$

$w_n = w_n(\hbar, t, x, \underline{\underline{\theta}})$: Moyal代数に値をとる

$t = (t_{n\alpha})$, $n \geq 0$, $\alpha \geq 0$.

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial W}{\partial t_{n\alpha}} = -\left(W * (i\hbar\partial_x)^n e^{i\alpha\theta_1} * W^{-1}\right)_{\leq -1} * W}$$

- $i\hbar$ … 古典極限を扱いやすくする
- $P * Q$ … Moyal代数係数擬微分作用素の積
- $(\cdots)_{\leq -1}$ … $i\hbar\partial_x$の負巾部分

問題

- 「τ函数」を定義せよ.
- 解空間に働く対称性の構造を明らかにせよ

連動