93-09-29

KP hierarchy の拡張

- KP hierarchy

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \partial_x^{-n} \qquad \left(\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$L = \partial_x + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} \partial_x^{-n}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = -(W \partial_x^n W^{-1})_{\leq -1} W,$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [\,(L^n)_{\geq 0}, L\,]$$

w_n, u_n : (t, x) の<u>スカラー値</u>函数

- 多成分 KP hierarchy

w_n, u_n : $N \times N$ <u>行列</u>値函数

- Moyal 代数係数 高次元 hierarchy

w_n, u_n : <u>Moyal 代数 (star積代数)</u>

に値をとる

93-09-29

Torus 上の Moyal 代数 (2変数)

$$\theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$$

$$z = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$$

torus 上の函数の star 積 ($\hbar$は形式的変数)

$$\boxed{f * g(\hbar, \theta) = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1 \partial\theta_2'} - \frac{\partial^2}{\partial\theta_2 \partial\theta_1'}\right)\right] f(\hbar, \theta) g(\hbar, \theta')\Big|_{\theta=\theta'}}$$

- 結合律をみたす. (Weyl symbol の合成則に他ならない.)

- Moyal bracket $\xrightarrow{\text{古典極限}}$ Poisson bracket

$$\{f, g\}_\hbar = \frac{2}{i\hbar}(f * g - g * f) \xrightarrow[\hbar \to 0]{} \{f, g\}$$

- trace の存在 $\boxed{\operatorname{tr}_\theta f = \int \frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2} f(\hbar, \theta)}$

$$\operatorname{tr}_\theta 1 = 1, \quad \operatorname{tr}_\theta f * g = \operatorname{tr}_\theta g * f$$

93-09-29

Torus上のMoyal代数に係数をもつhierarchy

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \, (i\hbar\partial_x)^{-n}$$

$w_n = w_n(\hbar, t, x, \underline{\underline{\theta}})$: Moyal代数に値をとる

$t = (t_{n\alpha}),\ n \geq 0,\ \alpha \geq 0.$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial W}{\partial t_{n\alpha}} = -\left(W * (i\hbar\partial_x)^n e^{i\alpha\theta_1} * W^{-1}\right)_{\leq -1} * W}$$

- $i\hbar$ … 古典極限を扱いやすくする
- $P*Q$ … Moyal代数係数擬微分作用素の積
- $(\cdots)_{\leq -1}$ … $i\hbar\partial_x$の負の部分

問題

- 「τ函数」を定義せよ.
- 解空間に働く対称性の構造を明らかにせよ

連動

93-09-29

主結果

● $\overbrace{\tau函数を}^{\tau=\tau(\hbar,t,x)}$次の方程式で定義できる。(この方程式はFrobenius可積分条件をみたす。)

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& i\hbar\frac{\partial\log\tau}{\partial t_{n\alpha}} = \operatorname*{res}_{\lambda}\operatorname*{tr}_{\theta}\Big[\lambda^{n}e^{i\alpha\theta_1} * W(\lambda)^{-1} \\
& \quad * \Big(\frac{\partial W(\lambda)}{\partial\lambda} - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k-1}\, i\hbar\,\frac{\partial W(\lambda)}{\partial t_{n0}}\Big)\Big], \\
& i\hbar\frac{\partial\log\tau}{\partial x} = i\hbar\frac{\partial\log\tau}{\partial t_{10}}.
\end{aligned}
}
$$

($W(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n\lambda^{-n}$ …… $i\hbar\partial_x$ を λ でおきかえた)

● 古典極限 $\hbar\to 0$ において

$$
\boxed{\log\tau = \hbar^{-2}F(t,x) + O(\hbar^{-1})}
$$

ここに現れる函数F(自由エネルギー)もτと同様の連立方程式によって特徴づけられる。(無分散KP hierarchyの自由エネルギーの高次元化を与える。)

93-09-29

(つづき)

- これらの hierarchy に対して無限次元 Lie 代数 (W_∞ 代数の高次元化) が無限小作用する. 特に古典極限 ($\hbar \to 0$) においては 4変数 ($\lambda, \mu, \theta_1, \theta_2$) の Poisson 代数

$$\boxed{\{\{f, g\}\} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial g}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial g}{\partial \lambda} + \{f, g\}}$$

の 1次元中心拡大が作用し, 作用の具体的な表示を与えることもできる.