# N=2 超対称 Yang-Mills 理論と Whitham-Toda hierarchy


中津 了勇　立命館大理工学部

高崎 金久　京大総合人学部


$N=2$ 超対称 Yang-Mills 理論に対する Seiberg-Witten の解を構造群が $G=SU(N)$ の場合に拡張すると, 次のような形の超楕円曲線族が現れる：

$$C: Y^2 = P(X)^2 - \Lambda^{2N}, \quad P(X) = X^N - \sum_{j=2}^{N} u_j X^{N-j}.$$

ここで $\Lambda$ は 0 でない定数, $u_j$ 達は理論の解のパラメータである. この曲線上の Abel 微分 $\lambda = XP'(X)dX/Y$ の周期

$$a_j = \oint_{\alpha_j} \lambda, \quad a_{Dj} = \oint_{\beta_j} \lambda$$

は monopole や dyon の質量を計る単位として基本的な意味をもつ. また $u_j$ の代わりに $a_j$ をパラメータとみるとき, それらの関数 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a)$ が存在して,

$$a_{Dj} = \partial \mathcal{F}/\partial a_j, \quad \tau_{jk} = \partial^2 \mathcal{F}/\partial a_j \partial a_k$$

($\tau_{jk}$ は周期行列）という関係が成り立つ. $\mathcal{F}$ も物理的には理論の低エネルギー有効作用という重要な意味をもつ.

さて, これらの美しい関係式の背後にはどのような数学的構造が隠れているのか？我々の結果は次のように要約される：

- 超楕円曲線 $C$ は本質的に, $N$–周期的戸田格子のスペクトル曲線である. このスペクトル曲線の変形を記述する一種の可積分系 (Whitham-Toda hierarchy) が存在する. $N=2$ 超対称 Yang-Mills 理論はその特殊解である.

- $\mathcal{F}$ という関数はこの可積分系において一般的に定義されるもので, 戸田格子の $\tau$ 関数と密接な関係がある.

以下,（1）の部分について説明する.

Riemann 面 $C$ は射影 $(X,Y)\mapsto X$ によって $CP^1$ の 2 重被覆となっている. $X=\infty$ の上の 2 点を $P_\infty$, $\tilde{P}_\infty$ と呼ぶことにする. $C$ 上には次のような有理型関数 $h,\tilde{h}$ が存在する：

$$h=P(X)+Y,\quad \tilde{h}=P(X)-Y.$$

これらは $h\tilde{h}=\Lambda^{2N}$ という関係で結ばれ, またいずれも $P_\infty,\tilde{P}_\infty$ において $N$ 位の極と零点（$h$ と $\tilde{h}$ とで役割が入れ替わる）をもち, それ以外では極も零点ももたない. （ちなみに, 戸田格子の理論ではこの $h$ が Kac-Moody 代数のループ変数として現れる.） $h^{-1/N},\tilde{h}^{-1/N}$ をそれぞれ $P_\infty,\tilde{P}_\infty$ における局所変数にえらぶ. このとき, Abel 微分の理論により, 次のような第 2 種微分 $d\Omega_n,d\tilde{\Omega}_n$ $(n=1,2,\ldots)$ と第 3 種微分 $d\Omega_0$ が一意的に決まる：

- $d\Omega_n$ は $P_\infty$ 以外で正則, $P_\infty$ において $d\Omega_n=dh^{n/N}+$ 正則, 各 $\alpha$–周期は消える.
- $d\tilde{\Omega}_n$ は $P_\infty,h$ のかわりに $\tilde{P}_\infty,\tilde{h}$ について同様の条件を満たす.
- $d\Omega_0$ は $P_\infty,\tilde{P}_\infty$ 以外で正則, $P_\infty$ において $d\Omega_0=\frac{1}{N}d\log h+$ 正則, $\tilde{P}_\infty$ において $d\Omega_0=-\frac{1}{N}d\log\tilde{h}+$ 正則, 各 $\alpha$–周期は消える.

さらに, 第 1 種微分の基底 $dz_j$ $(j=1,\ldots,N-1)$ を $\oint_{\alpha_j}dz_k=\delta_{jk}$, $\oint_{\beta_j}dz_k=\tau_{jk}$ という正規化条件で選ぶ.

以上のような Abel 微分のそれぞれに対して新たに次のような時間変数 $T_n,\tilde{T}_n,T_0,a_j$ を対応させる：

$$d\Omega_n\leftrightarrow T_n,\quad d\tilde{\Omega}_n\leftrightarrow\tilde{T}_{nn},\quad d\Omega_0\leftrightarrow T_n,\quad dz_j\leftrightarrow a_j.$$

各 Abel 微分はこれらの時間変数に依存すると考える. 我々の Whitham-Toda hierarchy は次のような形（Flaschka-Forest-McLaughlin 形式）の微分方程式である：

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega'=\frac{\partial}{\partial t'}\omega\quad (t,t'=T_n,\tilde{T}_n,T_0,a_j,\ \omega,\omega'=d\Omega_n,d\tilde{\Omega}_n,d\Omega_0,dz_j).$$