N=2 超対称 Yang-Mills 理論と Whitham-Toda hierarchy

中津了勇（~~立命館大・理工~~ 阪大理）

高崎金久（京大・総合人間）

e-prints:

1° hep-th/9509162

2° hep-th/9603069

Physics

$N = 2$ 超対称 SU(2) Yang-Mills 理論の Seiberg-Witten 解の構成要素：

① 楕円曲線族 $\quad Y^2 = (X^2 - \Lambda^2)(X - u)$

u : moduli of vacua

② 有理型微分 $\quad dS = \text{const.} \sqrt{\dfrac{X-u}{X^2-\Lambda^2}}\, dX$

③ 周期積分

$$a = \oint_\alpha dS$$

$$a_D = \oint_\beta dS$$

④ prepotential $\exists\, \mathcal{F} = \mathcal{F}(a)$

$$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}, \quad \tau = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2}$$

様々な拡張 …

- $SU(N_c)$, $SO(N_c)$
- QCD (YM + 物質場)
- $N = 4$

可積分構造

動機 Gorsky, Krichever, Marshakov, Mironov, Morozov が $SU(2)$ の場合に指摘したこと

- 楕円曲線 ＝ KdV方程式の楕円函数解のスペクトル曲線
  $Y^2 = (X^2-\Lambda^2)(X-u)$
- 有理型微分 dS ＝ 〃 〃 の変調理論(*)に対する Gurevich-Pitaevsky 解
- 無限個の可換な flow の系列（Whitham hierarchy）が背後に存在する.

(*) 楕円函数解の変調　　$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$

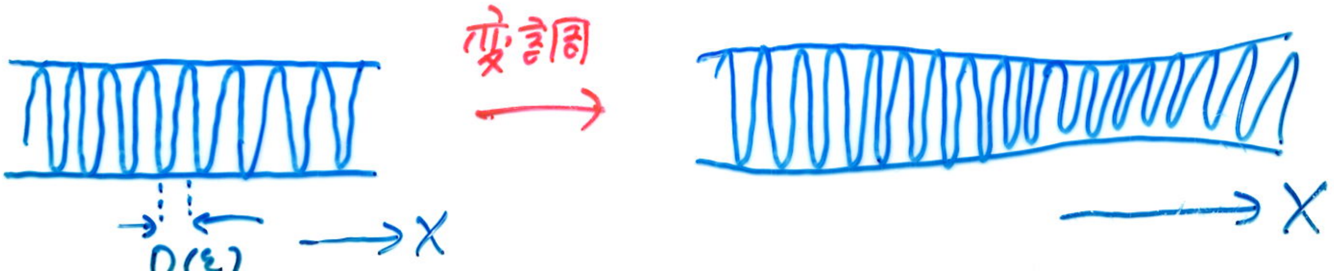
$$u = \wp(kx + \omega t + \cdots \mid g_2, g_3) + q$$

k, ω, q : 定数 (g_2, g_3 の函数)

↓

$$u = \wp(k(X,T)x + \omega(X,T)t + \cdots \mid g_2(X,T), g_3(X,T)) + q(X,T)$$

k, ω, q : slow variable X, T の函数 $\left(\begin{array}{l}\varepsilon x = X \\ \varepsilon t = T\end{array}\right)$



$\boxed{\text{目標}}$ $SU(N_c)$ などへの拡張：—

- $SU(N_c)$ 超対称 YM 理論の解 (Argyres-Faraggi, Klemm et al)

① 代数曲線 $C: Y^2 = P(X)^2 - \Lambda^{2N_c}$

$$P(X) = X^{N_c} + \sum_{j=2}^{N_c} u_j X^{N_c - j}$$

$\{u_j\}$: moduli of vacua

② 有理型微分 $dS = \text{const.} \dfrac{XP'(X)\,dX}{Y}$

③ 周期積分 $a_j = \oint_{\alpha_j} dS,\ a_{Dj} = \oint_{\beta_j} dS$

④ prepotential $^{\exists}\mathcal{F} = \mathcal{F}(a),\ a_{Dj} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_j}$

$$\tau_{jk} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_j \partial a_k}$$

これらを可積分系のことばで説明すること！

$\boxed{\text{結果}}$

- Martinec, Warner
- Nakatsu, T. (第1の論文)

} 相補的解答

共通の言語：戸田格子

我々の結果（認識）を以下に要約する：—

☆ 代数曲線Cは(本質的に) $SU(N_c)$ affine 戸田格子力学系のスペクトル曲線である。

周期的

(Martinec-Warner: $SO(N_c)$ etc, Langlands dual, etc etc …の大団円数)

☆ dSは次のように書き直せる (Martinec-Warner: 同じ)

$$dS = X\, d\log h, \quad h = \frac{P(X)+Y}{\Lambda^{N_c}}$$

次の微分方程式をみたす:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} dS\Big|_{h=\mathrm{const}} = dz_j$$

(正規化された第1種微分の基底)

☆ この微分方程式系は∞個の可換な flow T_n, $\tilde{T}_n$ ($n=1,2,\cdots$) をもつ可積分 hierarchy (Whitham-Toda hierarchy) に拡張できる。

$$\frac{\partial}{\partial T_n} dS\Big|_{h=\mathrm{const}} = d\Omega_n, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{T}_n} dS\Big|_{h=\mathrm{const}} = d\tilde{\Omega}_n$$

右辺はある正規化された第2種微分。もとのdSは拡張された $dS = dS(a, T, \tilde{T})$ の $T_1 = -\tilde{T}_1 = \mathrm{const}$, $T_2 = \cdots = \tilde{T}_2 = \cdots = 0$ への制限として復元される。

☆ Ω_n, $\tilde{\Omega}_n$ 達は $SU(N_c)$ affine 戸田場の方程式の準周期解 (Abel 函数解) の構成に現れるものに他ならない。上の Whitham-Toda hierarchy はその変調を記述する方程式である。

☆ prepotential $\mathcal{F}$ は対応する τ 函数の記述に現れる。

$$\tau = e^F \,\Theta(\cdots) \qquad F(t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{F}(T), \quad \varepsilon t = T$$

変調の起源

第2論文では変調の起源をisomonodromy問題で説明した. (厳密な裏付けは今後の課題)

$SU(N_c)$ affine 戸田場の方程式

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial t_1 \partial \tilde{t}_1} + e^{\phi_{j+1} - \phi_j} - e^{\phi_j - \phi_{j-1}} = 0 \quad \left(\phi_{j+N_c} = \phi_j\right)$$

\+ 斉次性条件 $t_1 \frac{\partial \phi_j}{\partial t_1} - \tilde{t}_1 \frac{\partial \phi_j}{\partial \tilde{t}_1} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} t_1 \to 1 \\ \tilde{t}_1 \to -1 \end{array}\right)$ weight

$= \boxed{\text{isomonodromy 変形}}$

($N_c = 2$: Painlevé III)

$t_1, \tilde{t}_1 \to \infty$ における漸近的振舞いを

$$\varepsilon t_1 = T_1, \quad \varepsilon \tilde{t}_1 = \tilde{T}_1 : \text{有限}, \quad \varepsilon \to 0$$

という変数でながめる. このとき multiscale 解析の考え方を適用すれば次のような描像が得られる:—

isomonodromy 問題
～ t に関する isospectrum 問題 ← 戸田格子スペクトル曲線
\+ T に関する slow dynamics ← Whitham-Toda system

cf. Painlevé 超越函数の漸近挙動に関する Boutroux の仕事 (1913) P_{I}, P_{II} ～ 楕円函数(の変調)

まとめ

- $N=2$ 超対称 $SU(N_c)$ Yang-Mills 理論の Seiberg-Witten 解における可積分構造を考察した.

- 代数曲線 $Y^2 = P(X)^2 - \Lambda^{2N_c}$ は $SU(N_c)$ affine 戸田格子と, また有理型微分 dS は $SU(N_c)$ affine 戸田場の方程式 (の準周期解) と, それぞれ密接な関係がある. 後者の意味は変調方程式 (Whitham-Toda hierarchy) により明確になる.

- prepotential $\mathcal{F}$ は τ 函数のことばで説明できる.

- 変調の起源を isomonodromy 問題で説明できる (ようだ).