Cubic Condition に基づく代数的可積分系の構成例

高崎 金久　京大総合人間学部
(Kanehisa Takasaki)　(Kyoto University)

「代数的可積分系」とは，複素シンプレクティック多様体 X が Lagrange 部分多様体による fibration $H : X \to U$ をもち，かつ各ファイバー $X_u = H^{-1}(u)$ が Abel 多様体となるものをいう．各ファイバーは実可積分系の Liouville トーラスに相当する．U 上の函数は互いに包合的な Hamiltonian を与え，ファイバーに沿って互いに可換な線形流を生成する．Donagi と Markman はこのような代数的可積分系を底空間 U の上のある 3 階テンソル場が完全対称となること（cubic condition）によって特徴づけた．

以下では代数曲線の変形族から cubic condition に基づいて代数的可積分系を構成する例を紹介する．これは Lax 表示を介さずに有限次元可積分系を構成することを可能にするもので，$N = 2$ 超対称ゲージ理論（Seiberg-Witten 低エネルギー有効理論）に応用がある．内容的にはほとんど新しい結果を含まないが，このように具体的な（かつ初等的な）説明は文献には見られないので，敢えて紹介することにした．

代数曲線族．次のような平面代数曲線を考える．

$$F(x, z) = z^{k+1} + g_1(x)z^k + \cdots + g_k(x)z + 1 = 0.$$

ここで各 $g_\alpha(x)$ は N_α 次の多項式で，次数 N_α は

$$N_1 < N_2 < \cdots < N_k, \quad N_1 \geq N_2 - N_1 \geq \cdots \geq N_k - N_{k-1}$$

という条件を満たすとする．$g_\alpha(x)$ の係数は generic な値をとるとする．$F(x, z)$ に含まれる単項式 $x^i z^\alpha$ の指数 (i, α) は Newton 多角形を埋め尽くす．各 $g_\alpha(x)$ の $N_\alpha - 2$ 次以下の項の係数を $u_{i\alpha}$ と書くと，これらは全部で $N_1 + \cdots + N_k - k$ 個ある．この個数は曲線の種数 g に等しい．これらを変形パラメータ $u = (u_{i\alpha})$，他の係数を定数として，曲線の g 次元族 C_u（$u \in U$）が定まる．以下 U の generic な点の近傍のみで考える．

周期行列と cubic condition．各曲線上にはパラメータ u とともに連続的に変化するサイクルのシンプレクティック基底 A_I, B_I（$I = 1, \cdots, g$）をあらかじめ選んでおく．正則微分の基底 $d\omega_I$（$I = 1, \cdots, g$）を A-サイクルについて正規化して，周期行列 $\mathcal{T}_{IJ}$ を定める：

$$\oint_{A_I} d\omega_J = \delta_{IJ}, \quad \oint_{B_I} d\omega_J = \mathcal{T}_{IJ}.$$

この曲線族上の有理型微分 $dS = xdz/z$ （Seiberg-Witten 微分）の周期積分

$$a_I = \oint_{A_I} dS, \quad a_I^D = \oint_{B_I} dS$$

により周期写像 $u \mapsto a = (a_I)$ ができるが，これは局所的に逆をもつ．それにより a をパラメータ空間の局所座標，$\mathcal{T}_{IJ}$ をその函数と見なすとき，Riemann の双線形関係式によって

$$\partial\mathcal{T}_{JK}/\partial a_I = \partial\mathcal{T}_{IK}/\partial a_J$$

となることがわかる．これがこの場合の cubic condition に他ならない．さらに，局所的に定義された函数 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a)$（プレポテンシャル）が存在して $\mathcal{T}_{IJ} = \partial^2\mathcal{F}/\partial a_I \partial a_J$，$a_I^D = \partial\mathcal{F}/\partial a_I$ となる．

可積分系の構成．周期行列 $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_{IJ})$ により Jacobi 多様体 $X_u = \mathbf{C}^g/\mathbf{Z}^g + \mathcal{T}\mathbf{Z}^g$ をつくる．これをファイバーとする U 上のファイバー空間 $X = \cup_{u \in U} X_u$ の上にシンプレクティック形式 σ を次で定める：

$$\sigma = \sum_{I=1}^{g} da_I \wedge dw_I$$

ここで w_I は $\mathbf{C}^g$ の標準座標である．a は U の局所座標と考えている．この式が意味を持つためには格子による平行移動

$$w_I \ \mapsto w_J + m_I + \sum_{J=1}^{g} \mathcal{T}_{IJ} n_J \quad (m_I, n_I \in \mathbf{Z})$$

で右辺が不変でなければならない．$\mathcal{T}_{IJ}$ は a に依存するので，これは無条件には成り立たないが，上の cubic condition はまさしくこれを保証する．こうして少なくとも U の generic な点の近傍では代数的可積分系ができる．