Cubic conditionにもとづく代数的可積分系の構成例

可積分系の幾何学的定式化

X : symplectic 多様体

$\varphi : X \to U$ Lagrangian fibration

$\pi^{-1}(u)$: Lagrange 部分多様体

(compact $\Rightarrow$ torus)

古典的なLiouville可積分性との関係

U 上の独立な函数系 $u_1, \cdots, u_n$

$(n = \dim U)$ に対して

$$H_j = u_j \circ \varphi$$

は包合系をなす : $\{H_j, H_k\} = 0$

$H_1 = c_1, \cdots, H_n = c_n$: "Liouville torus"

H_j のどれかを Hamiltonian とすれば他は保存量

代数的可積分系

X：複素シンプレクティック多様体

$\pi^{-1}(u)$：Abel多様体

（X自体が代数多様体であることを要請することもある。）

例 $X = \{ L(z) \mid L(z) = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & a_0 z \\ a_1 & \ddots & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{N-1} \\ a_0 z^{-1} & & & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix} \}$

$b_j = p_j \quad (\sum_{j=1}^{N} p_j = 0)$

$a_j = g e^{-q_j + q_{j+1}}$

（N-周期的戸田格子）

（$\dot{L}(z) = [A(z), L(z)]$：Lax形式）

$$\det(\lambda I - L(z)) = A(z + z^{-1}) + P(\lambda),$$

$$P(\lambda) = \lambda^N + \sum_{j=2}^{N} u_j \lambda^{N-j}$$

$\varphi : X \to U,\ (q, p) \mapsto (u_2, \cdots, u_N)$

$$C_u : \det(\lambda I - L(z)) = A(z + z^{-1}) + P(\lambda) = 0$$

(スペクトル曲線族)

$$\downarrow$$

$$z^2 + A^{-1} P(\lambda) z + 1 = 0$$

$$\text{genus} = N-1$$

$X_u = \mathrm{Jac}(C_u)$: C_u の Jacobi 多様体

$X = \bigcup_{u \in U} X_u$: これが上の場合の代数的可積分系の構造を与える.

— 通常は Lax 形式に基づいた議論で示す.
(微分方程式を解く)

— これを Lax 形式によらず直接に示すことはできないか?

- Veselov, Novikov, …, Krichever
- Mukai (K3 上の層の moduli 空間の研究)
- Donagi & Markman — Cubic condition