Cubic conditionにもとづく代数的可積分系の構成例

可積分系の幾何学的定式化

X : symplectic 多様体

$\varphi : X \to U$ Lagrangian fibration

$\pi^{-1}(u)$: Lagrange 部分多様体

(compact $\Rightarrow$ torus)

古典的な Liouville 可積分性との関係

U 上の独立な函数系 $u_1, \cdots, u_n$

$(n = \dim U)$ に対して

$$H_j = u_j \circ \varphi$$

は包合系をなす : $\{H_j, H_k\} = 0$

$H_1 = c_1, \cdots, H_n = c_n$: "Liouville torus"

H_j のどれかを Hamiltonian とすれば他は保存量

代数的可積分系

X：複素シンプレクティック多様体

$\pi^{-1}(u)$：Abel多様体

（X 自体が代数多様体であることを要請することもある。）

例 $X = \left\{ L(z) \;\middle|\; L(z) = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & a_0 z \\ a_1 & \ddots & a_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & a_{N-1} \\ a_0 z^{-1} & & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix} \right\}$

$b_j = p_j \quad \left(\sum_{j=1}^{N} p_j = 0 \right)$

$a_j = g\, e^{-q_j + q_{j+1}}$

（N－周期的戸田格子）

（$\dot{L}(z) = [A(z), L(z)]$：Lax形式）

$$\det(\lambda I - L(z)) = A(z + z^{-1}) + P(\lambda),$$

$$P(\lambda) = \lambda^N + \sum_{j=2}^{N} u_j \lambda^{N-j}$$

$\varphi : X \to U,\ (q, p) \mapsto (u_2, \cdots, u_N)$

$$C_u : \det(\lambda I - L(z)) = A(z + z^{-1}) + P(\lambda) = 0$$

(スペクトル曲線族)

$$\downarrow$$

$$z^2 + A^{-1}P(\lambda)z + 1 = 0$$

$$\text{genus} = N-1$$

$X_u = \mathrm{Jac}(C_u)$: C_u の Jacobi 多様体

$X = \bigcup_{u \in U} X_u$: これが上の場合の代数的可積分系の構造を与える．

— 通常は Lax 形式に基づいた議論で示す．
(微分方程式を解く)

— これを Lax 形式によらず直接に示すことはできないか？

- Veselov, Novikov, …, Krichever
- Mukai (K3 上の層の moduli 空間の例)
- Donagi & Markman — Cubic condition

例として，周期的戸田格子のスペクトル曲線を拡張したもの

$$F(z,\lambda) = z^{k+1} + g_1(\lambda) z^k + \cdots + g_k(\lambda) z + 1 = 0$$

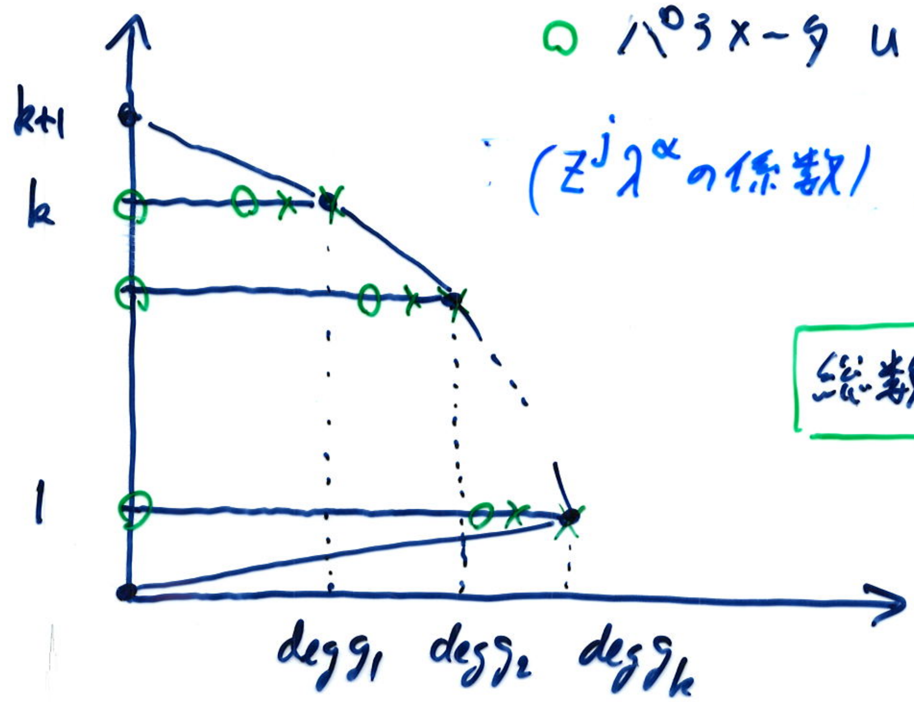
予稿ミスプリ

のJacobi多様体の族

$$X = \bigcup_{u \in U} X_u, \quad X_u = \mathrm{Jac}(C_u)$$

を考える.

<u>$g_1, \cdots, g_k$ に対する条件</u>: 定義方程式のNewton多角形の各点に対する係数がgenericな値をとる.



○ パラメータ $u = \{u_{j\alpha}\}$

($z^j \lambda^\alpha$ の係数) $j = 1 \cdots k$

$\alpha = 0 \cdots \deg g_k - 2$

↓

$\boxed{\text{総数} = \mathrm{genus}(C_u)}$

周期行列

u とともに連続的に変化する 1-cycle の symplectic 基底 A_J, B_J $(J=1\cdots g)$ をえらんでおく.

$d\omega_J$ $(J=1\cdots g)$: 正規化した第1種微分の基底

$$\oint_{A_J} d\omega_K = \delta_{JK}, \quad \oint_{B_J} d\omega_K = \tau_{JK}$$

(周期行列)

$$\mathrm{Jac}(C_u) \cong \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$$

平坦座標

$$a_J = \oint_{A_J} \lambda \frac{dz}{z}, \quad a_J^D = \oint_{B_J} \lambda \frac{dz}{z}$$

a_J 達は U 上の局所座標（ある種の「平坦座標」）とみなせる. a_J^D, τ_{JK} をこれらの函数とみるとき

$$\frac{\partial \tau_{JK}}{\partial a_I} = \frac{\partial \tau_{IK}}{\partial a_J}$$

(Cubic condition)

が成立する.（その背後には「プレポテンシャル」がある）

プレポテンシャル $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a_1, \cdots, a_g)$:

$$a_J^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_J}$$

$$\tau_{JK} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_J \partial a_K}.$$

Uの各点の近傍で存在する.

上の cubic condition は $\mathcal{F}$ の 3 階微分 …

… に従う.

可積分系の構成

$$X = \bigcup_{u \in U} X_u, \quad X_u = \mathrm{Jac}(C_u) = \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^g + J\mathbb{Z}^g$$

symplectic form σ を次で与える:

$$\sigma = \sum_{J=1}^{g} da_J \wedge dw_J$$

ただし (w_J) は $\mathbb{C}^g$ の座標.

$\mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^g + J\mathbb{Z}^g$ 上 well-defined であるためには

$$w_J \to w_J + m_J + \sum J_{JK} n_K \quad (m_J, n_J \in \mathbb{Z})$$

で不変でなければならない. $\boxed{\text{事実そうなる}}$

証明

$$\sum_J da_J \wedge d\left(w_J + m_J + \sum_K J_{JK} n_K\right)$$
$$= \sum da_J \wedge dw_J + \sum_K \underbrace{\left(\sum_J da_J \wedge dJ_{JK}\right)}_{\substack{\parallel \\ 0}} n_K$$

cubic condition
により

問題点 • このままでは $X \to U$ の base 方向に局所的にしか構成できていない.

• a_J, w_J は「代数的」ではない.

改善案

正規化されていない第一種微分の基底

$$d\eta_J = d\eta_{j\alpha} = \frac{z^j x^\alpha d\lambda}{F_z z}$$

$$(F = z^{k+1} + g_1(\lambda) z^k + \cdots + g_k(\lambda) + 1)$$

と正規化された基底 $d\omega_J$ の1次関係

$$d\eta_J = \sum_K A_{JK} d\omega_K$$

の係数によって $\mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^g + J\mathbb{Z}^g$ 上の新しい座標

$$v_J = \sum_K A_{JK} w_K$$

をつくると, 再び cubic condition などを使うことで

$$\sigma = \sum da_J \wedge dw_J = \sum du_J \wedge dv_J$$

がわかる. du_J, dv_J は「代数的」.