torus上のスペクトルパラメータをもつ等モノドロミー変形

99-09-29

$$P_{VI}:\ \frac{d^2\lambda}{dt^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2$$

$$-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\frac{d\lambda}{dt}$$

$$+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{\lambda^2}+\gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right).$$

$$\lambda=\frac{\wp(q)-e_1}{e_2-e_1}\qquad\left(\begin{array}{l}\wp(\omega_j)=e_j\\ \omega_1=\frac{1}{2},\ \omega_2=\frac{1+\tau}{2}\\ \omega_3=\frac{\tau}{2}\end{array}\right)$$

$$t=\frac{e_3-e_1}{e_2-e_1}$$

$$\Big\downarrow$$

$$(2\pi i)^2\frac{d^2q}{d\tau^2}=\sum_{j=0}^{3}\alpha_j\,\wp'(q+\omega_j)\qquad(\omega_0=0)$$

(Fuchs; Manin)

- Picardの解： $(\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0)$

$$q=c_1+c_2\tau$$

$(c_1, c_2$: constant$)$

- Hamiltonian $H=\frac{1}{2}p^2-\sum_{j=0}^{3}\alpha_j\wp(q+\omega_j)$

Inozemtsev系 (ell. CM系の一種)

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell} p_j^2 + \frac{g^2}{2}\sum_{\varepsilon,\varepsilon'=\pm 1}\sum_{j\neq k}\wp(\varepsilon q_j + \varepsilon' q_k)$$

$$+\sum_{a=0}^{3} g_a^2 \sum_{j=1}^{\ell}\wp(q_j+\omega_a)$$

$\boxed{\text{自励系}}$ $\quad \dfrac{dq_j}{dt} = \{q_j, H\}, \quad \dfrac{dp_j}{dt} = \{p_j, H\}$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \longrightarrow 2\pi i \frac{d}{d\tau}} \qquad \wp(u) = \wp(u|1,\tau)$$

$\boxed{\text{非自励系}}$

$$2\pi i\frac{dq_j}{d\tau} = \{q_j, H\}, \quad 2\pi i \frac{dp_j}{d\tau} = \{p_j, H\}$$

$\ell = 1$: Manninの方程式 $\quad \left(\sum_{j\neq k} \to 0\right)$

Levin & Olshanetsky ('97)

"Painlevé - Calogero 対応"

Hitchin系 $\longrightarrow$ 等モノドロミー変形

楕円型 CM 系 （ルート系に付随してきまる）

- untwisted model　$(p, q \in \mathbb{R}^l \supset \Delta)$

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta} g_{\nu(\alpha)}\wp(q\cdot\alpha)$$

- twisted model　(D'Hoker & Phong)

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta} g_{\nu(\alpha)}\wp_{\nu(\alpha)}(q\cdot\alpha)$$

- extended twisted model　(Bordner & Sasaki)

$B_l, C_l, \boxed{BC_l}$　　$\wp, \wp_\nu$ 両方含む

Inozemtsev 系

$$\wp_\nu(u) = \wp(u \,|\, \tfrac{1}{\nu(\alpha)}, \tau)$$

Lax 対 (⟹ 可積分性)

- Lie 代数の表現空間 (minimal) における構成　(…, D'Hoker & Phong)
- Wely 群の表現空間 （実際には Δ または その軌道を基底とするものを使う）における構成 (Bordner, et al)　"root-type Lax pair"

（→ 特に Inozemtsev 系の Lax 対ができる）

"root-type" の Lax 対の例

$\Delta = A_\ell, D_\ell, E_\ell$ （Δ は単一の $W(D)$ 軌道）

$$L(z) = P + ig\sum_{\alpha\in\Delta} x(\alpha\cdot q, z) E(\alpha)$$
$$+ 2ig \sum_{\alpha\in\Delta} x(\alpha\cdot q, 2z) E(2\alpha),$$

$$M(z) = D + ig\sum_{\alpha\in\Delta} y(\alpha\cdot q, z) E(\alpha)$$
$$+ 2ig\sum_{\alpha\in\Delta} y(\alpha\cdot q, 2z) E(2\alpha)$$

ここで $E(\alpha), E(2\alpha)$: $\Delta\times\Delta$ 行列 (i.e. $\in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{\Delta})$)

- $E(\alpha)_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha, \beta-\gamma}$
- $E(2\alpha)_{\beta\gamma} = \delta_{2\alpha, \beta-\gamma}$

$x(u,z), y(u,z)$: Calogero 方程式'n 従う

- $y(u,z) = \dfrac{\partial x(u,z)}{\partial u}$,
- $x(u,z)y(v,z) - y(u,z)x(v,z)$
  $= x(u+v, z)(\wp(u) - \wp(v))$
- $x(u,z)x(-u,z) = \wp(z) - \wp(u)$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = \{q, H\},\ \frac{dp}{dt} = \{p, H\} \Rightarrow \frac{dL(z)}{dt} = [L(z), M(z)]}$$

$\frac{d}{dt} \to 2\pi i \frac{d}{d\tau}$：同じLax対が等モノドロミー変形としてのLax方程式に従う：—

$$2\pi i \frac{dq}{d\tau} = \{q, H\},\quad 2\pi i \frac{dp}{d\tau} = \{p, H\}$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi i \frac{\partial L(z)}{\partial \tau} = [L(z), M(z)] - \frac{\partial M(z)}{\partial z}$$

ただし $\boxed{x(u,z) = \frac{\theta_1(z-u)\,\theta_1'(0)}{\theta_1(z)\,\theta_1(u)}, \text{ etc } \ldots}$ を使う.

その特徴：

$$\boxed{2\pi i \frac{\partial x(u,z)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 x(u,z)}{\partial u \partial z} = 0}$$ (Levin & Olshanetsky)

($x(u,z) = \frac{\sigma(z-u)}{\sigma(z)\sigma(u)}$, etc とうらんでは満たされない)

主結果 • Inozemtsev系を含む様々な楕円型CM系のLax対 (minimal type / root type) から、このようにして、対応する非自励系 (Manin系の拡張) のLax対が得られる.

• こうして得られるLax対は torus $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ 上の等モノドロミー変形を与える. 変形パラメータ = τ

Ref: math.QA/9905102