Seiberg-Witten 理論と可積分系

京都大学総合人間学部

高崎金久

takasaki@yukawa.kyoto-u.ac.jp

$N=2$ 超対称ゲージ理論の低エネルギー有効理論として Seiberg と Witten が見い出した解 [1, 2] について，場の理論（物理）と可積分系（数理）の両面から解説する．より詳しい内容や関連する文献については最後に掲げるレビュー [3, 4, 5] を参照されたい．

1　Seiberg-Witten 理論の物理

1.1　$N=2$ 超対称 Yang-Mills 理論

$N=2$ 超対称な４次元 Yang-Mills 理論はゲージ場 A_μ，２種類のスピノル場 λ_α,ψ_α およびスカラー場 ϕ の４種類の場から構成されている．いずれもゲージ群の Lie 代数に値をとる場で，Lie 代数の適当な基底 T_i により $A_\mu = A^i_\mu T_i$, etc., と表示される．

これらの場を (A_μ, λ_α)（ベクトル多重項）と (ϕ, ψ_α)（カイラル多重項）の２組に分けると，それぞれは $N=2$ 超対称性の半分，すなわち $N=1$ の超対称性に関して閉じた組（多重項）となる．作用積分を書くときにはこの $N=1$ の多重項を使うのが便利である．さらに，これらの多重項を４次元時空座標 x^μ に Grassmann 座標 $(\theta_\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha})$ を付け加えた超空間 $(x, \theta, \bar\theta)$ の上の $N=1$ の超場 (super-field)

$$\begin{aligned} W_\alpha &= \lambda_\alpha + \theta\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \cdots, \\ \Phi &= \phi + \theta\psi + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

にまとめておくと（W_α はスピノル超場，Φ はカイラル超場と呼ばれる）作用積分が次のように簡潔な形に書き下せる．

$$S = \frac{1}{2g^2}\int d^4x d\theta^2 d\bar\theta^2 \mathrm{Tr}(\Phi e^V \bar\Phi) + \frac{1}{8g^2}\mathrm{Tr}\Big(\int dx^4 d\theta^2 W^\alpha W_\alpha + h.c.\Big). \tag{2}$$

ただし V は $N=1$ ベクトル多重項から作られるもう一つの超場（具体的な形は省略）である．作用を本来の４種類の場で書くと次のような複雑な形になる．

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{g^2}\int d^4x \mathrm{Tr}\Big(&-\frac{1}{4}F_\mu\nu F^{\mu\nu} + i\lambda^i\sigma^\mu D_\mu\bar\lambda^i - (D_\mu\phi^\dagger)(D_\mu\phi) \\ &-[\phi,\bar\phi]^2 - \frac{i}{\sqrt2}\bar\phi\epsilon_{ij}[\lambda^i,\lambda^j] + \frac{i}{\sqrt2}\phi\epsilon_{ij}[\bar\lambda^i,\bar\lambda^j]\Big). \end{aligned} \tag{3}$$

ただし $\lambda^1 = \lambda, \lambda^2 = \psi$ とおいた．

$N = 2$ 超対称性を保ちながら物質場と結合した理論を考えることもできる．この場合の物質場は $N = 2$ 対称性で結ばれたいくつかの場の組（$N = 2$ 超多重項）からなり，quark に相当するスピノル場を含んでいる．そのため，$N = 2$ Yang-Mills 理論との結合系は通常の量子色力学（Quantum Chromodynamics, QCD）にならって $N = 2$ QCD と呼ばれる（ただし，そのままでは素粒子論の現実的模型としては使えない）．

1.2　古典論レベルでのモジュライ空間

一般に，場の理論の（古典論の意味での）真空とは作用積分を極小にするような場の配位のことである．そのような真空配位のなす空間をモジュライ空間という．量子効果を取り入れると真空ならびにそのモジュライ空間の構造は一般には変化する．量子効果を取り入れた真空のモジュライ空間を量子モジュライ空間と呼ぶ．

$N = 2$ Yang-Mills 理論の古典論的真空はゲージ場 A_μ とスピノル場 λ, ψ が 0 でスカラー場 ϕ のポテンシャル

$$V(\phi) = \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}[\phi, \bar{\phi}]^2 \tag{4}$$

が最小値 0 をとる配位

$$A_\mu = 0, \quad \lambda_\alpha = 0, \quad \psi_\alpha = 0, \quad [\phi, \bar{\phi}] = 0 \tag{5}$$

である．ゲージ変換で余分な不定性を除いておけば，このような ϕ は対角行列で与えられる．たとえばゲージ群が SU(2) の場合には

$$\phi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \tag{6}$$

というようになる．実際には，残りのゲージ変換で $\alpha \mapsto -\alpha$ と移せるので，本当の（ゲージ不変な）パラメータは α^2 あるいは $u = \mathrm{Tr}\phi^2$ である．同様に，SU(n) の場合には ϕ の特性多項式

$$\det(zI - \phi) = z^n + \sum_{k=2}^{n} u_k z^{n-k} \tag{7}$$

の係数がゲージ不変なパラメータを与える．したがって，この場合のモジュライ空間は $\mathbf{C}^n$ の n 次対称群（つまり SU(n) に付随する Weyl 群）作用による商空間である．（このあたりから，いわゆる ADE-系列とのつながりがうかがえる．）

この古典論的真空の特徴はいわゆるゲージ対称性の自発的破れが起こることにある．ϕ の固有値が互いに異なる場合を考えると，理論の実際の（これは「低エネルギーでの」と思えばよい）ゲージ不変性は ϕ と可換な部分群に限られるので，例えばゲージ群が $SU(n)$ の場合は $U(1)^{n-1}$ に同型な極大可換部分群にゲージ対称性が破れる．固有値の間に重複が生じる場合には非可換なゲージ対称性が残る．特に，$\phi = 0$ では本来のゲージ群がゲージ対称性として復元される．

量子効果を取り入れると，このような議論は成立しなくなり，モジュライ空間の構造も大幅に変わってくる．その様子を調べるために，低エネルギー有効作用というものを考える．

1.3 低エネルギー有効作用

低エネルギー領域での理論の振る舞いは低エネルギー有効作用で記述できる．理論が軽い粒子と重い粒子を含んでいる場合，低エネルギーでは軽い粒子のほうが主役となるので，重い粒子の効果を軽い粒子の振る舞いを特徴づけるパラメータ（質量，結合定数，など）の変化として繰り込んでしまうことができる．このようにして得られる作用積分を低エネルギー有効作用という．今の場合，前述のようにゲージ対称性が $SU(n) \mapsto U(1)^{n-1}$ というように自発的に破れると，Higgs 機構の名で知られている仕組により，破れた対称性に対応するゲージ場粒子が質量をもつ粒子に化ける．$U(1)^r$ （$r = \mathrm{rank}G$）に対応するゲージ場粒子は質量０のままにとどまって可換な $U(1)^r$ ゲージ場として振る舞う．この可換ゲージ場で低エネルギー有効作用を記述すればよい．

$N = 2$ 超対称 Yang-Mills 理論の場合，低エネルギー有効作用[1] はかなり制限された形をもつ．まず，低エネルギーでも $N = 2$ の超対称性があるので，低エネルギー有効作用は $U(1)^r$ をゲージ群にもつ $N = 2$ の ベクトル多重項 $W_\alpha = \lambda_\alpha + \cdots$ と $N = 2$ のスカラー多重項 $A = \phi + \cdots$ で記述できる．そのような有効作用の Langrangian は一般に１個の函数 $\mathcal{F}(A)$ を用いて次の形に書けることがわかっている．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\left[\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\frac{\partial\mathcal{F}(A)}{\partial A}\bar{A} + \int d^2\theta\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{F}(A)}{\partial A^i\partial A^j}W^{\alpha i}W^j_\alpha\right]. \tag{8}$$

ここに現われた函数 $\mathcal{F}(A)$（作用積分ではその変数 A のところにスカラー超場 A を代入している）はプレポテンシャルと呼ばれるものである．

さらに，弱結合領域 $|A| >> \Lambda$ [2] （Λ は繰り込み定数で，理論が強結合領域に入るエネルギースケールを表わしている）では，ここでも $N = 2$ 超対称性のおかげで，プレポテンシャルは次のような展開をもつことがわかる．(ただし簡単のため $SU(2)$ の場合を考えている．)

$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}_{\mathrm{cl}}(A) + \frac{i}{\pi}A^2\log(A^2/\Lambda^2) + \frac{1}{2\pi i}A^2\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\Lambda/A)^{4k}. \tag{9}$$

右辺第１項は古典論的（つまり tree level の）有効作用で，可換ゲージ群の場合の $N = 2$ Yang-Mills 理論の作用と同じ形（ただし一般には θ 角というパラメータを係数とする位相不変量が新たに付け加わる）をしている．第２項は摂動論的補正で，今の場合は $N = 2$ 超対称性のために 1-loop からの寄与しかない．第３の部分はインスタントン補正で，インスタントン数についての展開の形（係数の c_k も A の函数）をしている．展開が $(\Lambda/A)^4$ の巾のみからなるのは $N = 2$ Yang-Mills 理論に内在する R-対称性という $U(1)$-対称性のアノマリーのためである．

---

[1] 正確に言えば，ここでは Wilson 流の低エネルギー有効作用汎函数のうち「局所的な」部分，つまり通常の作用積分のように場の有限階 — 実際には２階まで — の導函数の積分汎函数を指す．Wilson 流の有効作用そのものは $N = 2$ 超対称理論の場合といえども非局所汎函数である．

[2] ここでいう弱結合領域 $|A| >> \Lambda$ は Λ のエネルギースケールから見ればむしろ高エネルギー側にあるので，低エネルギー有効作用という設定に一見矛盾するように思われるが，実はこれでよい．ゲージ対称性の自発的破れが起こるエネルギースケールは Λ よりもはるかに大きい（あるいは Λ の方をそれに比べて小さく選ぶと言ってもよい）．ここでは $|A|$ がそれに比べて小さく，かつ Λ よりは大きい，という領域を考えている．

1.4　量子モジュライ空間と低エネルギー有効理論の解

量子モジュライ空間の大域的構造を明らかにするためには強結合領域のことも調べなければならない．これは一般には大変難しい問題であるが，Seiberg と Witten は $N=2$ 超対称ゲージ理論に 電磁双対性と呼ばれる離散的対称性が内在することを示して，この難問に答えた．[1, 2] 電磁双対性は電磁場の古典論にも存在する双対性であるが，量子化することにより超対称ゲージ理論の強結合領域と弱結合領域を入れ換える双対性となる．それにより強結合領域を弱結合領域に写して調べることができる．Seiberg と Witten はこの電磁双対性を使って量子モジュライ空間の特異点の位置とその周りのモノドロミー的性質（ある一対の物理量 a, a^D が満たすべき）を決定した．そして，特殊な形の楕円積分がこのモノドロミー的性質を満たすことを示して，これが低エネルギー有効理論の厳密解であると主張したのである．

最も基本的な，ゲージ群が $SU(2)$ で物質場のない場合 [1] について，Seiberg と Witten が与えた低エネルギー有効理論の解を説明する．理論のモジュライとして $\mathrm{Tr}\phi^2$ の期待値 $u =< \mathrm{Tr}\phi^2 >$ をとる．量子モジュライ空間は u-平面に無限遠点を付け加えた球面で，特異点は $u = \pm\Lambda^2, \infty$ の 3 点からなる．この特異点は楕円曲線

$$y^2 = (z^2 - \Lambda^4)(z - u) \tag{10}$$

が退化するところに他ならない．この楕円曲線上に

$$dS = \frac{z-u}{y}dz \tag{11}$$

という有理型微分を考える．これは $z = 0$ にのみ極をもち留数をもたない第 2 種微分である．この有理型微分を基本サイクル α, β に沿って積分したもの

$$a = \oint_\alpha dS, \quad a^D = \oint_\beta dS \tag{12}$$

が所要のモノドロミー的性質を満たす．プレポテンシャルは u の代わりに a を独立変数，a^D をその函数とみなすと

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = a^D \tag{13}$$

という関係で復元される．こうして定まる低エネルギー有効理論の解が Seiberg-Witten 解である．Seiberg と Witten はこの解を使って，電荷の閉じ込め現象（通常の Yang-Mills 理論におけるいわゆる color の閉じ込めに相当する）を説明している．

$SU(2)$ の基本表現に属する物質場（$N = 2$ 超多重項）が存在する場合の解 [2] も同様に楕円曲線の言葉で記述されるが，物質場のない場合と違って，dS にあたる有理型微分は物質場の質量に対応する極と留数をもつ．

このように，Seiberg と Witten の議論はかなり発見的な論法を含んでいるので，別の方法で妥当性を検証する必要がある．そのような試みは現在でも各方面で続いている．

2　Seiberg-Witten 理論の数理

2.1　Seiberg-Witten 解の数学的定式化

以上のような物理的な背景を踏まえて（あるいは忘れて），数学的に割り切った形で定式化すると，Seiberg-Witten 解とは要するに

- 複素代数曲線（Riemann 面）
- その上の特別な有理型微分
- その基本サイクルにそっての周期積分
- それらの周期積分からきまるプレポテンシャル

の４つの基本的構成要素の組である．以下，この形で議論を進める．

Seiberg と Witten はゲージ群が $SU(2)$ の場合を扱ったが，ここでは $SU(n)$ に拡張された形で考える．また，話を簡単にするため，物質場を含まない場合を考える．この場合には（一般化された）Seiberg-Witten 解を構成する上の４つの要素は次のようなものになる．[6, 7]

複素代数曲線（Seiberg-Witten 曲線 $SU(n)$ の場合には次のような超楕円曲線が現われる．

$$y^2 = P(z)^2 - \Lambda^{2n}, \tag{14}$$

ここで $P(z)$ は n 次の多項式で，実は古典論的真空のモジュライ空間の定義に出てきた ϕ の特性多項式に他ならない．

$$P(z) = z^n + \sum_{k=2}^{n} u_k z^{n-k}. \tag{15}$$

Λ は前述の強結合領域のエネルギースケールである．なお，$n = 2$ の場合には上の曲線は右辺が z の４次式の楕円曲線になるが，その形は Seiberg と Witten の与えたものとは食い違っている．これは楕円曲線に対する２通りの表示（Weierstrass 流と Abel-Jacobi 流）に対応していて，実質的に等価である．

有理型微分（Seiberg-Witten 微分） 有理型微分としては次の形のものを考える．

$$dS = \frac{zP'(z)}{y}dz. \tag{16}$$

これは $z = \infty$ の上の２点で極をもつ以外は正則で，極においては留数が０の，いわゆる第２種有理型微分である．なお，ここで

$$h = \frac{P(z) + y}{\Lambda^n} \tag{17}$$

という有理型函数を導入すると，この有理型微分は

$$dS = zd\log h = z\frac{dh}{h} \tag{18}$$

というようにも書ける．このことは可積分系との関連を見るときに重要になる．

周期積分 上の超楕円曲線の種数は $n-1$ であり，その Riemann 面上には $2n-2$ 個の基本サイクル α_j, β_j $(j = 1, \cdots, n-1)$ がある．それらに対して周期積分

$$a_j = \oint_{\alpha_j} dS, \quad a_j^D = \oint_{\beta_j} dS \tag{19}$$

を考える．これらは $N = 2$ Yang-Mills 理論ではモノポール（磁気単極子）やダイオン（磁荷と電荷の両方をもつ）の質量の単位という物理的な意味をもつ．

プレポテンシャル $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ をモジュライ空間の座標に選び，$(a_1^D, \cdots, a_{n-1}^D)$ をそれらの函数と考えるとき，次の方程式（Frobenius 可積分条件は満たされている）の解としてプレポテンシャル $\mathcal{F}$ が定義される．

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_j} = a_j^D. \tag{20}$$

ちなみに，プレポテンシャルの 2 階導函数は上の超楕円曲線の周期行列 τ の行列要素に一致することがわかる：

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j} = \tau_{ij}. \tag{21}$$

周期積分とプレポテンシャルの関係についてもう少し補足しておく．

1．今の場合，理論のモジュライは超楕円曲線のパラメータ $u_2, \cdots, u_n$ である．有理型微分 dS をこれらのパラメータで微分することを考える．h を一定に保ちながら微分すると（これは要するに一種の接続を考えるということであるが），

$$\left.\frac{\partial}{\partial u_k} dS\right|_{h=\mathrm{const}} = -\frac{z^k}{y} dz \tag{22}$$

という有理型微分ができる．これらは極をもたない正則微分で，しかもあきらかに 1 次独立である．一般に複素代数曲線の上の正則微分は種数に等しい次元のベクトル空間をなすから，上の正則微分系はちょうどその基底を与えている．

2．ところで，このベクトル空間の標準的な基底 dz_j $(j = 1, \cdots, n-1)$ は α-サイクルについて正規化されたもの

$$\oint_{\alpha_j} dz_k = \delta_{jk} \tag{23}$$

である．(周期行列の行列要素は残りの β-サイクルに沿った周期積分

$$\oint_{\beta_j} dz_k = \tau_{jk} \tag{24}$$

で与えられる.）上の正規化されていない基底と正規化された基底は１次変換で結ばれるが，その変換行列を調べて見るとちょうど $(u_2, \cdots, u_n)$ と $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ の間の Jacobi 行列であることがわかる．特に，$(a_1, \cdots, a_{n-1})$ をモジュライ空間の（局所）座標系に選べることがわかる．同時に

$$\frac{\partial}{\partial a_k} dS\Big|_{h=\mathrm{const}} = dz_k \tag{25}$$

という関係も従う．これは Seiberg-Witten 解と可積分系との関連を考える際の鍵の一つとなる基本的な関係式である．

３．上で得られた微分の間の関係から特に

$$\frac{\partial a_j^D}{\partial a_k} = \oint_{\beta_j} dz_k = \tau_{jk} \tag{26}$$

となる．周期行列は対称行列なので，

$$\frac{\partial a_j^D}{\partial a_k} = \frac{\partial a_k^D}{\partial a_j} \tag{27}$$

となるが，これはプレポテンシャルの定義方程式の Frobenius 可積分条件に他ならない．こうしてプレポテンシャルが（局所的に，かつ積分定数の不定性を残してではあるが）決まることがわかる.

2.2 スペクトル曲線としての Seiberg-Witten 曲線

Seiberg-Witten 曲線を可積分系のスペクトル曲線と見ることにより可積分系との関連が見えてくる．このことは最初 Gorsky 達 [8] によって指摘された．それによれば，$SU(2)$ の場合に Seiberg と Witten が与えた楕円曲線 (10) は KdV 方程式の楕円関数解であり，また $SU(n)$ の場合の超楕円曲線 (14) は周期的戸田格子のスペクトル曲線とみなすことができる．さらに $SU(n)$ 以外の場合についても同様に戸田型の可積分系との関連があることがわかる [9] （ただし A-D-E 系列以外は少し複雑な事情になっている）.

$SU(n)$ の場合に周期的戸田格子とどのように対応しているかを説明する.

n-周期的戸田格子は Lax 表示

$$\frac{dL(h)}{dt} = [A(h), L(h)] \tag{28}$$

をもつ．ここで $L(h)$ はパラメータ h を含む次の形の $n \times n$ 行列である.

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & c_n h^{-1} \\ c_1 & b_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_n h & & & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \tag{29}$$

b_j, c_j は戸田格子の座標と運動量から作られる量であるが具体的な形は今は必要ない.（ c_j は普通は a_j と書かれるが，前述の周期積分と記号が重なるので記号を変えた）．よく知られているように，上のような Lax 方程式のもとで $L(z)$ の固有値は時間によらず一定である．より正確に言えば $L(h)$ の固有多項式が時間に依らない：

$$\frac{d}{dt}\det\Big(zI - L(z)\Big) = 0. \tag{30}$$

固有方程式

$$\det\Big(zI - L(h)\Big) = 0 \tag{31}$$

が (z,h)-平面に定める複素代数曲線を n-周期的戸田格子のスペクトル曲線という．

固有多項式を具体的に計算すると，このスペクトル曲線は

$$h^2 - C^{-1}P(z)h + 1 = 0 \tag{32}$$

という形に書けることがわかる．ただし $P(z)$ は z^n から始まる z の n 次多項式，C は $C = \prod_{j=1}^n c_j$ で与えられる運動の定数である．この方程式を h について解くと，

$$h = \frac{P(z) + \sqrt{P(z)^2 - 4C^2}}{2C} \tag{33}$$

となる．従って定数 C と Λ が $\Lambda^n = 2C$ という関係にあるならば，

$$y^2 = P(z)^2 - 4C \tag{34}$$

で定義される超楕円曲線は $SU(n)$ の場合の Seiberg-Witten 曲線 (14) と同一視できて，上の h も dS の定義式 (18) に現れる h に他ならない．要するに、n-周期的戸田格子のスペクトル曲線とゲージ群が $SU(n)$ の場合の Seiberg-Witten 曲線とはまったく等価なもので，単に表示のための座標（(h,z) と (y,x)）が違うに過ぎない．

2.3 Seiberg-Witten 微分の解釈

Seiberg-Witten 微分 dS の解釈については様々な提案がある．一つの解釈はソリトン方程式の変調理論（Whitham 理論）によるものである．これは最初 Gorsky 達 [8] が主張したもので，$SU(2)$ の場合の dS の構造が KdV 方程式の楕円関数解の変調理論（Gurevich と Pitaevsky による）に現れる微分と同一であることに基づく．$SU(n)$ などの場合にも dS の構造を戸田格子の Whitham 理論から説明することはできる.（ただし変調理論を適用するためには戸田格子をいったん 2 次元戸田場のヒエラルヒーに埋め込む必要がある [10].）

しかしながら，Whithan 理論による解釈の難点は変調というものが $N=2$ 超対称なゲージ場の理論において何を意味するのかよくわからないことにある．このことと関連するのが可積分系の時間変数（例えば戸田格子における t）の解釈の問題である．この時間変数が場の理論で何を意味するのかよくわからない．

物理的に見てもっと自然な解釈はいくつか提案されている．一つは特殊な超弦理論の極限として Seiberg-Witten 解を導くもの [11, 4] である．これをさらに発展させたものとし

て，M-理論の特別な 5-brane から Seiberg-Witten 解を導くもの [12] がある．これらはいずれも membrane や高次元の brane の言葉で Seiberg-Witten 解を再解釈するものである．この他に，Martinec による独自の試み [13] もある．

数学的に見ても，その後の可積分系からのアプローチでは [14, 15, 16] 変調という解釈は影を潜め，むしろ "special geometry" あるいは "special Kähler geometry" という概念が前面に出てきている．これはもともと $N = 2$ 超対称性と関わりの深い概念で，3 次元の Calabi-Yau 多様体に値をとる σ 模型や mirror 対称性の研究ではすでによく知られていて，Seiberg と Witten の仕事の中でも最初から指導原理として採用されている．Seiberg-Witten 理論はそのようなものが複素代数曲線にも現れることを指摘した点でも面白いのである．

3　今後の方向

Seiberg と Witten の最初の仕事 [1, 2] は $N = 2$ 超対称性にもとづく場の理論的手法を全面的に駆使していた．それはまた当時重要性を増しつつあった双対性の概念を試す場でもあった．双対性が本来力を発揮するのはむしろ超弦理論であり，それゆえ Seiberg-Witten 解を超弦理論から導くこと [11, 4] はごく自然な成り行きと言える．超弦理論においてはこの数年の間に様々な種類の双対性が発見された．これらの双対性は異なるタイプの超弦理論を写し合うものである．これらの双対性の発見により，以前は別のものと考えられていた異なるタイプの超弦理論が M-理論という名の１１次元理論に統一される，というシナリオが完成しつつある．Seiberg-Witten 理論を M-理論から導出する試み [12] は現在その意味するところが盛んに研究されている．

このような物理での研究の進展とともに，可積分系の視点もますます重要になっているように思われる．特に，有限次元可積分系，その中でも Hitchin system [17] とその穴空き Riemann 面への拡張 [18] が Seiberg-Witten 理論の拡張のための数学的枠組みとして [14] のみならず超弦理論や brane 理論においても [19, 12] 重要な役割を担って現れるようである．これについては別の機会に改めてとり上げるつもりである．

参考文献

[1] N. Seiberg and E. Witten, Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N = 2 supersymmetric Yang-Mills theory, Nucl. Phys. **B426** (1994), 19-52. (hep-th/9407087)

[2] N. Seiberg and E. Witten, Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N = 2 supersymmetric QCD, Nucl. Phys. **B431** (1994), 484-550. (hep-th/9408099)

[3] L. Alvarez-Gaumé and S.F. Hassan, Introduction to S-duality in N=2 supersymmetric gauge theories, hep-th/9701069.
（モノポールと $N = 2$ 超対称なゲージ場の理論について詳細かつ教育的に書かれている.）

[4] W. Lerche, Introduction to Seiberg-Witten theory, hep-th/9611190.
A. Klemm, On the geometry behind $N = 2$ supersymmetric effective actions in four dimensions, hep-th/9705131.
（Seiberg-Witten 理論の A-D-E 系列への拡張とそれらのストリング理論からの導出についてレビューしている．引用文献が豊富.）

[5] R.Y. Donagi, Seiberg-Witten integrable systems, alg-geom/9705010.
（Seiberg-Witten 理論と可積分系との関わりについて，Donagi-Witten[14] の論文で提示された視点からレビューしている.）

[6] A. Klemm, W. Lerche, S. Theisen and S. Yankielowicz, Simple singularities and N = 2 supersymmetric Yang-Mills theory, Phys. Lett. **344B** (1995), 169-175. (hep-th/9411048)

[7] P. Argyres and A. Faraggi, Phys. Rev. Lett. **73** (1995), 3931-3934. (hep-th/9411057)

[8] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, Integrability and Seiberg-Witten exact solution, Phys. Lett. **335B** (1995), 466-474. (hep-th/9505035)

[9] E. Martinec and N.P. Warner, Integrable systems and supersymmetric gauge theory, Nucl. Phys. **B459** (1996), 97-112. (hep-th/9509161)

[10] T. Nakatsu and K. Takasaki, Whitham-Toda hierarchy and N = 2 supersymmetric Yang-Mills theory, Mod. Phys. Lett. **A11** (1996), 157-161. (hep-th/9509162)

[11] A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr, C. Vafa and N. Warner, Self-dual strings and N = 2 supersymmetric field theory, hep-th/9604034.

[12] E. Witten, Solutions of four-dimensional field theories via M theory, hep-th/9703166.

[13] E.J. martinec, Integrable structures in supersymmetric gauge theory and string theory, Phys. Lett. **B367** (1996), 91-96. (hep-th/9510204)

[14] R. Donagi and E. Witten, Supersymmetric Yang-Mills theory and integrable systems, Nucl. Phys. **B460** (1996), 299. (hep-th/9510101)

[15] A. Gorsky and A. Marshakov, Towards effective gauge theories on spectral curves, Phys. Lett. **B375** (1996), 127. (hep-th/9510224)

[16] H. Itoyama and A. Morozov, Integrability and Seiberg-Witten theory, Nucl. Phys. **B477** (1996), 855-877 . (hep-th/9511126); Prepotential and the Seiberg-Witten theory, Nucl. Phys. **B491** (1997), 529-573. (hep-th/9512161)

[17] N.J. Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface, Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 59-126; Stable bundles and integrable systems, Duke Math. J. **54** (1987), 91-114.

[18] E. Markman, Spectral Curves and integrable systems, Comp. Math. **93** (1994), 255-290.

[19] M. Bershadsky, V. Sadov and C. Vafa, D-branes and topological field theories, Nucl. Phys. **B463** (1996), 420-434. (hep-th/9511222)