Whitham hierarchy について

京都大学総合人間学部 高崎金久

Whitham 方程式系（あるいは Whitham hierarchy）の概念はソリトン方程式の準周期解の変調を記述するものとして 70 年代に導入され, 80 年代に組織的な研究が行われたが, 最近全く別の方向（弦理論や超対称性場の理論）から新たな関心を呼んでいる.

1 Whitham hierarchy とはなにか？

Whitham hierarchy（あるいはその構成要素としての Whitham 方程式）というのは一言で言えば Riemann 面の一種の変形方程式である.（もう少し正確に言えば Riemann 面とその上に指定されたいくつかの函数との組の変形を記述する.）その一般的な定式化は Dubrovin, Krichever によって与えられている [1, 2]. それに従えば, 通常のソリトン方程式における Lax 表示に相当するのは次の Flaschka-Forest-McLaughlin 形式 [3] と呼ばれる方程式である：

$$\frac{\partial}{\partial T_j} d\Omega_k \Big|_{E=const} = \frac{\partial}{\partial T_k} d\Omega_j \Big|_{E=const}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial T_j} dS \Big|_{E=const} = d\Omega_j. \tag{2}$$

ただしここで, $d\Omega_j$ は Riemann 面 $C = C(T)$（時間 $T = (T_1, T_2, \ldots$— によって変化する）の上の特別な有理型微分, また E は C 上に与えられた有理型函数で, C とともに T に応じて $E = E(T)$ というように変化するものとする. $d\Omega_j$ 達は極の位置, その付近での E による局所的表示, 周期に関する正規化条件により一意的に決められるので, 上の方程式は結局 (C, E) の時間変化を記述する方程式となる.

実際には, これよりも一般的な定式化もなされている（超対称場の理論への応用にはそれが必要）が, とりあえず上の形の方程式を念頭においておけば十分である. いくつか例を掲げておく.

例１：無分散 KP hierarchy の N-reduction この場合には $C = \mathbf{C}P^1$ で Riemann 面自体は変形しない. 変形するのは函数 E の方だけである. E は N 次の多項式

$$E = p^N + u_2 p^{N-2} + \cdots + u_N \quad (p \in \mathbf{C}P^1), \tag{3}$$

また $d\Omega_j$ は

$$d\Omega_j = d\mathcal{B}_j, \quad \mathcal{B}_j = \left(E^{j/N}\right)_+ \tag{4}$$

で与えられる. $(\quad)_+$ は例のごとく p についての多項式部分を意味する.

実際には, reduction を行わない無分散 KP hierarchy 自体も E という大域的な函数の代わりに $\mathcal{L} = p + O(p^{-1})$ という Laurent 級数（上の E とは $\mathcal{L} = E^{1/N}$ という関係で結ばれる）から構成される Whitham hierarchy である. 同様にして無分散戸田 hierarchy も上の意味で Riemann 球面に付随する Whitham hierarchy と見なせる. これらの hierarchy の解の記述については Gibbons と Kodamda による詳細な研究がある [4].

例２：楕円曲線にともなう Whitham hierarchy 楕円曲線

$$C: \ w^2 = (E - E_1)(E - E_2)(E - E_3) \tag{5}$$

とその上の函数 E を考える. この場合にはむしろ Riemann 面が変形の主体となる. この Riemann 面は 2 枚の Riemann 球面を $E = \infty$ と $E = E_1$, $E = E_2$ と $E = E_3$ のそれぞれの間にカットを入れて張り合わせることでできる. $E = \infty$ は 2 重の分岐点である. これは KdV 方程式の楕円函数解のスペクトル曲線に他ならないことに注意されたい. KdV 方程式の楕円函数解を Krichever の方法でつくるときと同様, 微分形式とし次のようなもの $d\Omega_1 (= dp), d\Omega_3, d\Omega_5, \ldots$ を考える：

1. $d\Omega_j$ は $E=\infty$ にのみ極をもち, 他では正則,
2. $E=\infty$ の近傍で $d\Omega_j = dE^{j/2} +$ 正則,
3. $2\int_{E_2}^{E_3} d\Omega_j = \oint_\alpha d\Omega_j = 0$.

これらはいわゆる正規化された第 2 種微分である. たとえば最初の微分形式は

$$dp = d\Omega_1 = \frac{1}{2}\frac{E+r}{w}dE, \quad r = -\int_{E_2}^{E_3}\frac{EdE}{w} / \int_{E_2}^{E_3}\frac{dE}{w}, \tag{6}$$

同様にして

$$\begin{aligned} d\Omega_3 &= \frac{3}{2}\frac{E^2+r_1E+r2}{w}dE, \\ &\vdots \\ d\Omega_{2n+1} &= \frac{2n+1}{2}\frac{E^{n+1}+\cdots}{w}dE, \end{aligned} \tag{7}$$

というように決って行く. これらの定める Whitham hierarchy が KdV 方程式の楕円函数解の変調を記述する. ちなみに, 偶数番目の微分形式は dE^n という exact form になり, Whitham dynamics には関与しない.

この例はさらに超楕円曲線へと拡張できる. 実際, KdV 方程式は超楕円曲線に付随する準周期解ももつ. その場合の超楕円曲線は $w^2 = (E-E_1)\cdots(E-E_{2g+1})$ という形で与えられる. この場合にも上と同様に正規化された第 2 種微分 $d\Omega_j$ が存在し, それにより構成される Whitham hierarchy ができる. さらに, KdV 方程式以外にも変形 KdV 方程式, 周期的戸田格子, sine-Gordon 方程式, 非線型 Schrödinger 方程式などは超楕円曲線に付随する準周期解をもつので, 同様の Whitham hierarchy を構成できる.

楕円曲線の場合も含めて, これら超楕円曲線の場合, Whitham hierarchy は分岐点の座標 E_j に関する連立偏微分方程式系

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial T_j} = v_\alpha^j \frac{\partial E_\alpha}{\partial X} \tag{8}$$

に書きなおせる. ここで $X = T_1$ （すなわち $dp = d\Omega_1$ に付随する時間変数）, また v_α^j は

$$v_\alpha^j := \left.\frac{d\Omega_j}{dp}\right|_{E=E_\alpha} \tag{9}$$

で与えられる. 上の方程式は流体力学的方程式系の中でも特別な形をしている. この形の方程式の可積分性についての幾何学的研究もなされている（Dubrovin と Novikov のレビュー [5] に詳しい）. それによれば, 上の方程式は一種の可積分系で, 一般化されたホドグラフ法（正確に言えば, その代数幾何学的な拡張 [1, 2]）によって解けることが分かっている.

以下, このような Whitham hierarchy がどのような問題において研究されてきたかを, 過去から現在に至る研究の流れにほぼ即した順序で紹介する.

2 変調方程式としての意味

Whitham 方程式系が最初に登場したのは, KdV 方程式の楕円函数解の変調の問題 [6] においてである. その後 80 年代を通じて, 様々なソリトン方程式に対して準周期解（とくにソリトン列と呼ばれる周期解）の変調方程式が調べられている [5].

変調という考え方について, KdV 方程式の楕円函数解を例にとって, 簡単に説明してみよう. KdV 方程式の楕円函数解は Weierstrass の $\mathcal{P}$ 函数を用いて

$$u = \mathcal{P}(kx + \omega t + c \mid g_2, g_3) + q \tag{10}$$

と書かれる. ここで k, ω, c, q は定数で, 特に k と ω は g_2, g_3 によって決まる. これは周期的な波列をあらわすが, ここで, この波列が場所や時間の長いスケールでゆっくり変化するという状況を考えてみよう. スケールの違いを表現するためにスケーリングパラメータ ϵ とそれによって引き延ばされた “遅い変数”

$$X = \epsilon x, \quad T = \epsilon t \tag{11}$$

を導入する．そして

$$\begin{aligned} g_2 &\to g_2(X,T), & g_3 &\to g_3(X,T) \\ k &\to k(X,T), & \omega &\to \omega(X,T), \\ c &\to c(X,T), & q &\to q(X,T) \end{aligned} \tag{12}$$

という置き換えを行う．これはこれまで定数であったものを場所や時間的にゆっくりと（断熱的に）変化させることを意味する．これが変調ということである．その上で u が依然として（$O(\epsilon)$ の誤差を除いて）KdV 方程式を満たすことを要求する．これは g_2, g_3, c が勝手に変化しては満たされないことで, この要請は g_2, g_3, c に対する微分方程式（変調方程式）に翻訳される．

このような議論は流体物理やパターン形成論など偏微分方程式によって物理系のモデル化を行う様々な分野で幅広く行われてきているものであり, その適用範囲はなにもソリトン方程式に限らない．ただ, ソリトン方程式の場合と違って, 通常は変調を考える対象が平面波的な簡単な場合に限られる．（それ以外の厳密解を求めることは難しい．）

ソリトン方程式の場合は自明でない厳密解が求められるので, 変調理論の内容もより豊かにできる．実際, 変調方程式はすでにのべたように Riemann 面上の有理型微分を用いて書き下すことができる．

3　分散性衝撃波

有名な Zabusky-Kruskal の KdV 方程式の数値計算の目的の一つは分散性の小さい KdV 方程式で何が起こるかを知ることにあったそうである．KdV 方程式を

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = 0 \tag{13}$$

と書くとき, 彼らの選んだ分散係数は $\delta = 0.022$ というかなり小さい値である．この方程式を周期的境界条件下におき, 正弦波を初期値として解きはじめると何が起こるか．これは今では教科書に必ず出てくる話なので、たいていの方は知っているだろう：正弦波は山の部分が前方に次第に乗り出してくる．そして海岸の波のようにオーバーハングの状態になるか、と思いきや、その寸前に, 8 つのソリトンに別れる（ソリトンの形成）．さらにずっと先へ進むと（そこまで数値的に追跡するのはあまり簡単でないそうだが）, ある時間でもとの正弦波に戻る（再帰現象）．

ところで, オーバーハング寸前の状態からソリトンの形成へと進む過程は実は一種の衝撃波状態（分散性衝撃波）と見ることができる．この現象は最初 Gurevich, Pitaevsky により数値的に見いだされ [7] 旧ソ連における Whitham 方程式（という名前で呼ばれたかどうか知らないが）の研究の先駆けとなった．さらに, その後理論的側面の研究が（数値的側面も併せて）Lax 達により精力的に進められている [8]．

衝撃波を形成する方程式としてよく知られているのは Burgers 方程式であるが, これは散逸型方程式である．これに対して KdV 方程式は純分散型方程式で, 衝撃波といってもやや概念が異なる．Burgers 方程式の場合の衝撃波面は一種の不連続面であるが, 分散型方程式における衝撃波というのはむしろ細かいスケールの空間的振動として現れる．KdV 方程式でそれを見るには, Zabusky-Kruskal の数値実験で空間のサイズをもっと大きくとればよい．実際、区間を大きくして適当な初期値（たとえば正弦波）で解きはじめると, やがてオーバーハングに近づくところまでは前と同じであるが, そのあと観察されるのはソリトンというよりは, むしろ細かい振動領域の出現である．この振動領域はよくみるとかなり規則的にならんだソリトンの列にほかならないことがわかる．要するに, 8 個くらいではソリトンにしか見えないが, 区間をずっと大きくとって何十個ものソリトンの列が形成されるようになれば, むしろ空間的振動と言う方がふさわしい, というわけである．このような振動領域の出現はいろいろな分散性方程式で見られる．Lax 達のレビュー [8] にはそのような美しい数値実験の結果がたくさん紹介してある．

Lax とその協力者たちは KdV 方程式の場合について非常に詳しい理論的な研究を行い, 逆散乱法を巧妙に利用することによって, 分散性衝撃波の様子が Whitham 方程式の解として理解できること（これは Gurevich, Pitaevsky もある程度示し, あるいは予想していた）を示した．この研究は Venakides 達 [9], Bloch 達 [10] によって戸田格子へと拡張が試みられている．

4　超対称 Yang-Mills 理論（Seiberg-Witten 理論）

紙数が残り少なくなったが, 最後に, 最近の理論物理で話題となっている Seiberg-Witten 理論との関係について触れる．この方面は現在も研究が進行中であるので, 関心をおもちの方はインターネット上で流通している理論物理の e-print 情報 [11] にアクセスしてみられるとよい.

Seiberg と Witten [12] は $N=2$ および $N=4$ 超対称性をもつゲージ理論においてその量子論的な解が Riemann 面の変形族（モジュライ）の言葉で書けることを明らかにした．（実際には, それと関連して 4 次元の位相不変量に対する新しい記述法を示し, むしろその方で数学者 — トポロジスト — の間にセンセーションを巻き起している．以下はその裏話の観がなきにしもあらずである．）

Seiberg-Witten の論文はおもに $N=2$ の $SU(2)$ 理論を扱っている．その場合には代数曲線族として楕円曲線族が現れる．Gorsky 達はその中に KdV 方程式に付随する Whitham 方程式の構造が隠れていることを明らかにした [13]．これが Seiberg-Witten 理論と可積分系が関わり合うことになった話の発端である．その後この話は $N=2$ の $SU(n)$ （ならびに $SO(n)$）理論へ拡張され, 実は n-周期的戸田格子が隠れていることが分かった [14, 15].

最近, この話はさらに $N=4$ 理論へと拡張されつつある．ここに現れるのは楕円型 Calogero-Moser 系という可積分系である．この辺りの進展については Itoyama-Morozov の論文 [16] とその引用文献を参照されたい.

参考文献

[1] B.A. Dubrovin, Commun. Math. Phys. **145** (1992), 195-207; Nucl. Phys. **B379** (1992), 627-689; Geometry of 2D topological field theories, SISSA-89/94/FM, hep-th/9407018.

[2] I.M. Krichever, Topological minimal models and soliton equations, Talk at the 1st Sakharov Conference, Moscow 1991; Commun. Pure and Appl. Math. **XLVII** (1994), 437-475.

[3] H.Flaschka, M.G.Forest and D.W.McLaughlin, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980) 739.

[4] Y. Kodama, Phys. Lett. **129A** (1988), 223-226; Phys. Lett. **147A** (1990), 477-482.
Y. Kodama and J. Gibbons, Phys. Lett. **135A** (1989), 167-170.

[5] B.A. Dubrovin and S.P. Novikov, Russ. Math. Surveys **44:6** (1989), 35-124.

[6] G.B.Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley, New York, 1974.

[7] A.Gurevich and L.Pitaevsky, JETP **65** (1973) 65.

[8] P.D. Lax, C.D. Levermore and S. Venakides, in: *Important Developments in Soliton Theory*, A.S. Fokas and V.E. Zakharov (eds.), Series in Nonlinear Dynamics (Springer-Verlag, Berlin, 1994).

[9] S. Venakides, P. Deift and R. Oba, Comm. Pure. Appl. Math. **44** (1991), 1171-1242.

[10] A.M.Bloch and Y.Kodama, SIAM J. Appl. Math. **52**-4 (1992) 909.

[11] URL http://www.yukawa.kyoto-u.ac.jp （京都大学基礎物理学研究所 WWW サーバ）

[12] N.Seiberg and E.Witten, Nucl.Phys. **B426** (1994) 19-52; *Err.*: ibid. **B430** (1994) 485-486, hep-th/9407087; ibid. **B431** (1994) 484-550, hep-th/9408099.

[13] A.Gorsky, I.Krichever, A.Marshakov, A.Mironov et al., Phys.Lett. **355B** (1995) 466-474, hep-th/9505035.

[14] E.Martinec and N.Warner, hep-th/9509161.

[15] T.Nakatsu and K.Takasaki, hep-th/9509162.

[16] H. Itoyama and A. Morozov, hep-th/9511126.