葉山 97-10-24~26 (1

(総合研究大学院大学
研究グループ「新分野の開拓」
小グループ研究会
「自然現象と計算論
との整合性」)

微分方程式と
計算可能性

京都大学総合人間学部
髙崎金久

※ 数理研研究会
でも使った

~~※ 可積分系とは関係ありません;~~

~~※ 離散解析とも(あまり)関係
ありません;~~

97-07-28~30
「離散可積分系と離散解析」

離散量に関する計算可能性の問題は $\mathbb{N}$ 上の計算可能性の理論として今世紀前半の Turing, Church, Kleene らの先駆的研究以来多くのことがわかっている.

連続量つまり $\mathbb{R}$ 上の計算可能性は60年代以降に本格的な研究が始まり, いまだに確定した枠組が定まっていないようである.

ここでは微分方程式への応用を中心に $\mathbb{R}$ 上の計算可能性に関するいくつかの異なる枠組を紹介する.

この問題に興味をもつに至ったきっかけ

次のような一見相反する主張に出会った。

- ある種の微分方程式では、方程式や初期値を構成する関数が計算可能であっても解が計算可能ではないことがある。
  (Roger Penrose の本に引用されていた Pour-El, Richards の結果)

- 常微分方程式の右辺を構成する関数が計算可能ならば初期値問題の解は計算可能である。
  (北大理学部の辻下徹氏の講義録に出ている結果)

— 「計算可能」の意味が違う？

※ 数式処理で解が得られるという意味ではありません。

$\mathbb{N}$上の計算可能性

同等な特徴づけ（モデル）

- Turing machine
- λ計算
- 帰納的関数 recursive function
- while プログラム
- …

$\mathbb{N}$から$\mathbb{N}$への部分関数

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ （または$\mathbb{N}$の部分集合 Dから$\mathbb{N}$への関数）

が計算可能 $\Longleftrightarrow$ 上のいずれかで特徴づけられる。

…要するに、今ある計算機で整数計算により計算できるもの。（途中でループに入って答が出ないときは定義域Dに入っていないと解釈する。）

$\boxed{\text{N上の計算可能関数は可算個しかない。}\ \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n, \cdots}$

（∵ whileプログラムは可算個しかない）

NからNへの（部分）関数は非可算集合をなす。従って（対角線論法）

$\boxed{\text{計算可能でない関数が（それも沢山）存在する。}}$

（その道では）有名な例：—

HALT(P, x)　P：プログラムコード
　　　　　　x：Pのあらわすプログラムへの入力

P(x)が停止するならば1，そうでなければ0の値を返す。

(注) プログラムコードはプログラムを自然数にコーディングしたもの。この例は2変数関数だが，2変数関数は自然数対の適当なコーディングにより1変数関数に直せる。

帰納的集合と帰納的~~可算~~枚挙可能集合

あとで必要になるので説明.

① $\mathbb{N}$ の部分集合 A が帰納的 (recursive) であるとは次の関数 $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が計算可能であることをいう：

$$p(n) = \begin{cases} 1 & (n \in A) \\ 0 & (n \notin A) \end{cases}$$

② $\mathbb{N}$ の部分集合 A が帰納的~~可算~~枚挙可能 (recursively enumerable) であるとは次の互いに同値な条件のいずれかがみたされることをいう：

(i) 計算可能な全域関数 $a: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して A はその値域である. つまり,

$$A = \{a(0), a(1), a(2), \cdots\}$$

(ii) 計算可能な部分関数 p が存在して A はその定義域である.

Pour-El, Richards の仕事では次のような事実が重要な役割を演じる：—

$\boxed{\text{帰納的}\cancel{\text{可算}}\text{枚挙可能だが帰納的でない集合が存在する.}}$

(これも有名な)例：

$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \cdots$ ：計算可能関数全体

$i_0, i_1, i_2, \cdots$ ：それぞれのコード $(\in \mathbb{N})$

$$A = \{ n \mid \phi_n(i_n) \text{ が停止する} \}$$

$$= (n \text{ の関数 } \phi_n(i_n) \text{ の定義域})$$

$\mathbb{R}$上の計算可能性 — いくつかの枠組

① 実数をatomicに扱い，$\mathbb{N}$(あるいは$\mathbb{Z}$)上の計算論と平行に論じる

L. Blum, M. Shub, S. Smale,
Bull. AMS 21 (1989), 1-46.

内容：$\mathbb{R}$上のmachine, NP完全性，帰納的関数，帰納的可算集合，応用としてのJulia集合

② 実数を(無限)小数として扱い，各桁の計算可能性にまで立ち入って考察する．

Grzegorczyk ; Pour-El, Richards
(60年代～70年代)

帰結：計算可能な関数からなる微分方程式でも解は計算可能とは限らない．

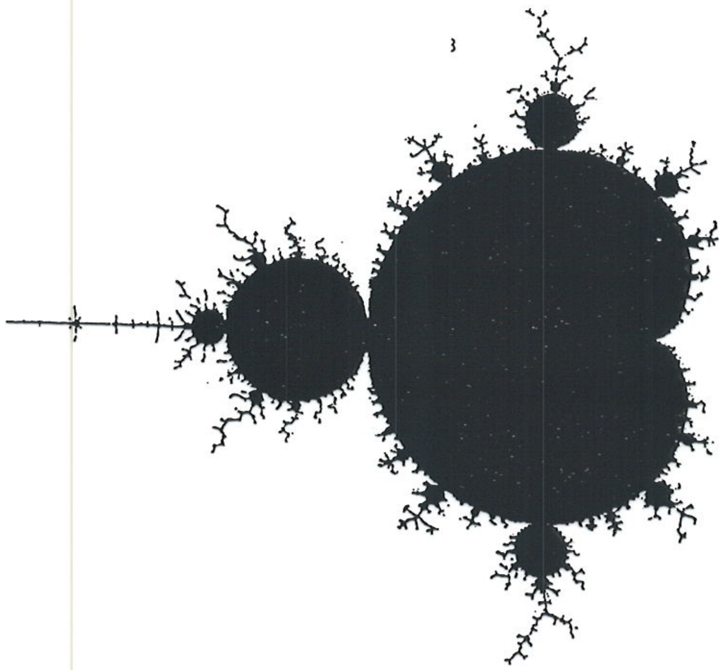
M. Pour-El, I. Richards,
- Ann. Math. Logic 17 ('79), 61-90
- Adv. Math. 39 ('81), 215-239.

③ 超準解析，無限小 Turing machine

辻下 徹，北大講究録

Blum-Shub-Smale の $\mathbb{R}$ 上の machine の例ー

machine = "流れ図"



$\mathbb{C}$

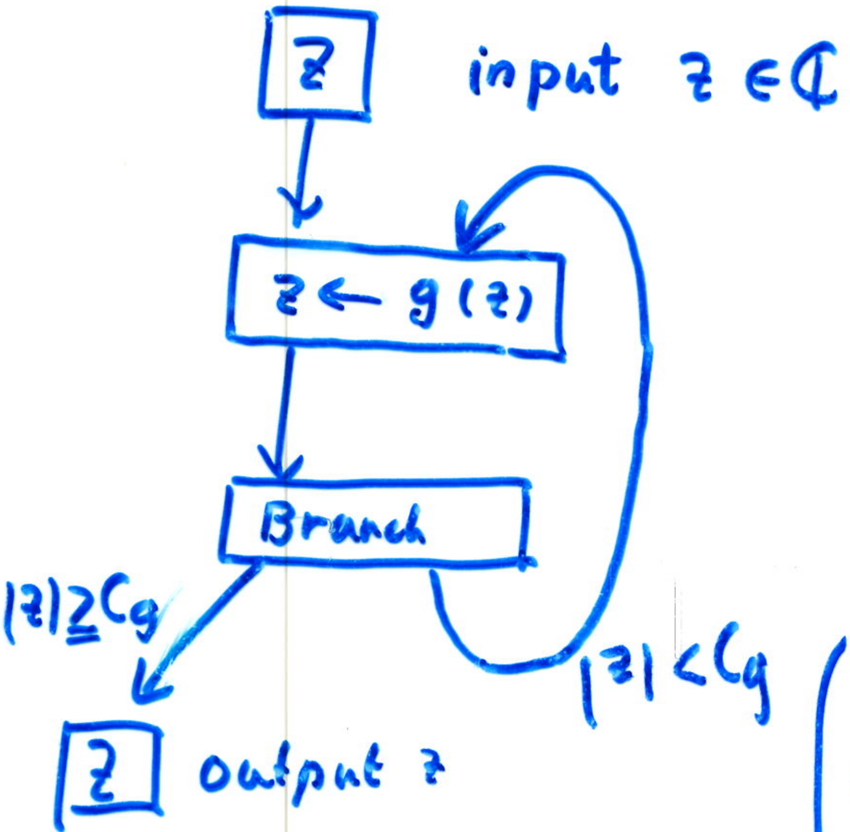
Mandelbrot集合

まちがい。

これは z の値の集合 ではなくて、

$g(z) = z^2 + c$ とするときのパラメータの集合

$\{ c \mid \lim_{n\to\infty} |g^n(0)| \to \infty$ とならない。$\}$.



C_g:

if $|z| > C$ then

$|g^k(z)| \to \infty$ as $k \to \infty$

計算可能な数, 数列, 関数

① 有理数列 $\langle r_n \rangle$ が計算可能 (みふいの帰納的)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 計算可能な関数 $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ により

$$r_n = (-1)^{s(n)} \frac{a(n)}{b(n)}$$

と書ける.

② 実数 x が計算可能

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ x に effective に収束するような計算可能有理数列 $\langle r_n \rangle$ がある. つまり, 計算可能関数 $e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して

$$|x - r_k| \leq 10^{-n} \quad (k \geq e(n)). \quad (*)$$

要するに, ただ収束するだけではなく, どのくらいの速さで収束するか, ということも ($e(n)$ という計算可能関数を通じて) 見積れる, ということらしい.

(*) $\langle r_n \rangle$ を $\langle r'_n = r_{e(n)} \rangle$ でおきかえれば $|x - r_n| \leq 10^{-n}$ という形にもとれる.

例：—

$\mathbb{N}$の部分集合Aで、帰納的可算だが帰納的でないものをとる。aをその枚挙関数とする。

$$A = \{a(0), a(1), \cdots\}$$

aは単射であるとしてよい。

(つまり $m \neq n$ ならば $a(m) \neq a(n)$)

このとき実数

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-a(n)}$$

は計算可能ではない。

— この例は Pour-El, Richards の用いている重要な技巧の一つである。

③ 実数列 $\langle x_k \rangle$ が計算可能

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 計算可能な有理数列の列 $\langle r_{kn} \rangle$ が存在して すべての k, n に対して

$$|x_k - r_{kn}| \leqq 10^{-n}$$

となる.

④ 閉区間 $I = [a, b]$ から $\mathbb{R}$ への関数 f が計算可能

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (a) f は sequentially computable, つまり I の任意の計算可能な点列 $\{x_n\}$ に対して $\{f(x_n)\}$ も計算可能

(b) f は effectively uniformly continuous, つまり, 計算可能な $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して I の任意の2点 x, y に対して

$$|x - y| \leq \frac{1}{d(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqq 10^{-n}.$$

Pour-El, Richards の扱った問題・結果

1. 常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$F(x, y)$は計算可能函数とする。このとき解の計算可能性を問う。Pour-El, Richardsはある点 $x = a$ の近傍でどの解も計算不可能になるような F の例を与えた。(Lipschitz条件は要求しない。その際解の非一意性を巧妙に利用している。Lipschitz条件を仮定するとすべての解は計算可能になる。)

2. 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$u(0, x, y, z) = f(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y, z) = 0.$$

初期データ $f(x, y, z)$ が計算可能であるとして解(またはその特定の点での値)の計算可能性を問う。この場合も計算可能性の崩れる例を与えた。

3. Banach空間上の線形作用素に関する問題。
→「構成的数学」

Pour-El, Richardsの見出した結果の一つ

波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$

の初期値問題 $u(x,y,z,0)=f(x,y,z)$,

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0)=0$

を与える。このとき次のような初期値 $f(x,y,z)$ が存在する：—

(a) $f(x,y,z)$ は計算可能（特に連続）

(b) $u(x,y,z,t)$ は連続だが計算可能でない。

(c) $u(0,0,0,1)$ は計算可能でない数。

アイディア

$f(x,y,z) \longrightarrow u(x,y,z,t)$: 積分表示（Kirchhoffの公式）を使う。

前述のような枚挙関数 $a(n)$ を使って f を構成する。（$f(x,y,z)=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）

$u(0,0,0,1)=f(1)+f'(1)$,

$f(1)=$ 計算可能

$f'(1)=\sum_{n=0}^{\infty}10^{-a(n)}=$ 計算可能でない。

超準解析からのアプローチ（辻下）

$\mathbb{N}, \mathbb{R}$ の超準モデル ${}^*\mathbb{N}, {}^*\mathbb{R}$

${}^*\mathbb{N}$ …「無限大」の自然数を含む.

${}^*\mathbb{R}$ …「無限大」と「無限小」の実数を含む.

$x, y \in {}^*\mathbb{R}$ が無限小の差

$$x \simeq y$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad |x-y| < \frac{1}{n}$$

各点のまわりに $\boxed{\text{無限小近傍}}$ をもつ.

→ 微積分（無限小解析）の再構成　超準解析（さらに超準数学）

微分 → 差分

積分 → 総和

微分方程式 → 差分方程式

微分

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \simeq f'(a) \quad (x \simeq a)$$

積分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{st}\left(\varepsilon \sum_{0<i\varepsilon<b-a} f(a+i\varepsilon)\right)$$

$\varepsilon = \dfrac{1}{N}$, N：超準自然数

$\mathrm{st}(x)$ ： x の標準部分

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(a) = b.$$

$\varepsilon = 1/N$, N：超準自然数

$u(t+\varepsilon) \simeq u(t) + f(t, u(t))\,\varepsilon,$

$u(a) = b.$

$\downarrow$

「差分方程式」と思って解ける.

微分方程式の解(のひとつ?)

格子 $L=\{a+i\varepsilon \mid i\in {}^*\mathbb{N},\ i<N(b-a)\}$

差分方程式

$$v(t+\varepsilon)=v(t)+f(t,v(t))\varepsilon,\quad t\in L,$$
$$v(a)=b$$

$$\downarrow$$

$$v(t)=b+\sum_{a<s<t} f(s,v(s))\varepsilon,\quad t\in L.$$

$$\downarrow$$

$$u(t)=st\left(v\left(a+\left[\frac{t-a}{\varepsilon}\right]\right)\right)\quad a\le t\le a'$$

$[\ \ ]: {}^*\mathbb{R}\to {}^*\mathbb{Z}$ 整数部分

比較 Cauchy-Peanoの折れ線に相当する.

Ascoli-Arzelaの定理(同程度連続函数族の相対コンパクト性)はどこへ行った?

u(t)が解であることを示すのは簡単ではない(準備が必要.). そういうところに吸収されている.

計算可能函数

η：非標準的自然数

$\varepsilon = 1/\eta$ （正の無限小実数）

$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$N(x) = \left[\frac{x}{\varepsilon}\right]$$

を考える.

$$x \simeq N(x)\varepsilon.$$

この $x \mapsto N(x)$ を通じて実数の話を

${}^*\mathbb{Z}$ 上の話に翻訳する：

$\boxed{\text{定義}}$ $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ が計算可能であるとは

古典的な意味での計算可能函数 F：

$\mathbb{Z}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ が存在して

$$f(x_1, \cdots, x_n) \simeq F(N(x_1), \cdots, N(x_n), \eta)\varepsilon$$

となることを言う。

無限（小）Turing 機械 … ${}^*\mathbb{N}$ 上に拡張した Turing 機械

例

1. 実数の加算 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

$$x_1 + x_2 \simeq (N(x_1) + N(x_2))\varepsilon.$$

2. 乗法 $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

$$x_1 x_2 \simeq (N(x_1) N(x_2)/\eta)\varepsilon.$$

3. 計算可能函数の原始函数 $\int^x f(t)dt$

$$f(x) \simeq F(N(x), \eta)\varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$G(n+1, m) = G(n, m) + F(n, m),$$

$$G(0, m) = 0.$$ （原始帰納.）

$$\downarrow$$

$$\int^x f(t)dt \simeq G(N(x), \eta)\varepsilon.$$

4. 計算可能函数からなる常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(a) = b$$

に対して前述のように無限小差分方程式を解いて得られる解.