

溶解結晶模型の可積分構造

Integrable structure of melting crystal models

高崎金久 近畿大学工学部

Kanehisa Takasaki

Faculty of Science and Engineering, Kinki University

概要

溶解結晶模型の可積分構造に関する数年間の研究 [1, 2, 3, 4, 5] を紹介する。前半では最も基本的な模型の場合に焦点を絞り、平面分割による分配函数の定義、対角断面の方法による分配函数の書き換え、外部ポテンシャルによる変形、分配函数のフェルミオン表示、1次元戸田階層の τ 函数との関係を順次説明する。後半ではコニフォルドに関連する模型やオービフォルド版模型についての最近の結果を説明する。これらの模型の分配函数は2次元戸田階層の τ 函数と関係する。対応するラックス作用素は因子分解された特殊な形をもち、Ablowitz-Ladik (相対論的戸田) 階層など、2次元戸田階層に埋め込まれた可積分階層の解であることがわかる。

1 溶解結晶模型

溶解結晶模型 [6, 7] は xyz 空間の第1象限を占める結晶の角が溶解する状況 (現実の物理系を想定しているわけではない) を平衡統計力学系として定式化したものである。結晶は単位立方体からなり、第1象限における補集合が**3次元ヤング図形**の形をしているとする (図1)。このような3次元ヤング図形を整数データで表現するために**平面分割** [8, 9, 10] を用いる。

通常の意味の**分割** (整数分割) は

$$\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty} = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$$

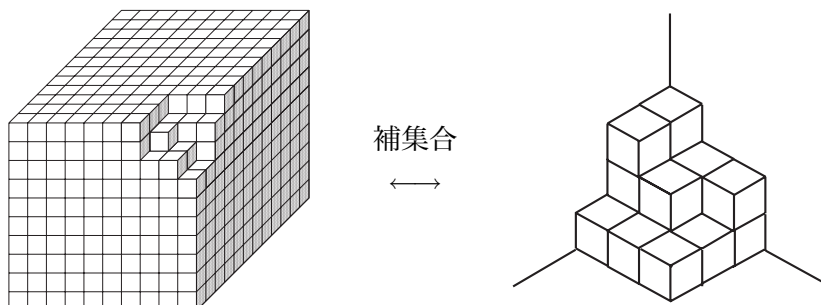


図1: 角の溶けた結晶 (左) と3次元ヤング図形 (右)

という形の単調減少非負整数列 (0 と異なる要素は高々有限個) である. このような分割 λ には i 番目の行が λ_i 個の単位正方形からなるヤング図形が対応する. 要素の総和

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$$

はヤング図形の面積である.

平面分割はこのような 1 次元的配列を 2 次元化したもの

$$\pi = (\pi_{ij})_{i,j=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

であり, その要素は 2 方向に単調減少するという条件

$$\begin{array}{c} \pi_{ij} \geq \pi_{i,j+1} \\ \vee \\ \pi_{i+1,j} \end{array}$$

を満たす. ここでも 0 と異なる要素は高々有限個である. このような平面分割 π に対して, xy 平面上の (i, j) 番目のます目 $[i-1, i] \times [j-1, j]$ の上に高さ π_{ij} の単位立方体の柱を積み上げれば, 3次元ヤング図形ができる (図 2). π_{ij} の総和

$$|\pi| = \sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{ij}$$

は 3次元ヤング図形の体積を与える.

これ以降は, 分割 λ , 整数分割 π とそれが表すヤング図形, 3次元ヤング図形を同一視して, 「ヤング図形 λ 」, 「3次元ヤング図形 π 」という言い方をすることにしよう.

3次元ヤング図形 π (あるいはその補集合である結晶) のボルツマン重みを $q^{|\pi|}$ ($0 < q < 1$) と定める. 平面分割全体の集合 \mathcal{PP} にわたるこの重みの総和

$$Z = \sum_{\pi \in \mathcal{PP}} q^{|\pi|}$$

として溶解結晶モデルの分配関数が定義される. この分配関数は**対角断面** (diagonal slicing) の方法によって計算できる [6, 11].

$$\pi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

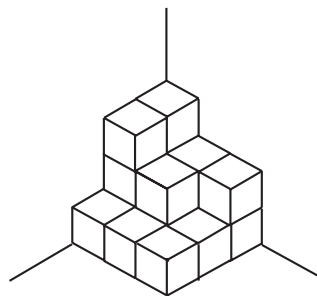


図 2: 平面分割の定める 3次元ヤング図形

2 対角断面の方法

2.1 対角断面

平面分割 $\pi = (\pi_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ に対して m 番目 ($m \in \mathbf{Z}$) の対角断面 $\pi(m)$ を

$$\pi(m) = \begin{cases} (\pi_{i,i+m})_{i=1}^{\infty} & \text{if } m \geq 0, \\ (\pi_{j-m,j})_{j=1}^{\infty} & \text{if } m < 0 \end{cases}$$

と定義する. これらは1次元的な分割であり, ヤング図形に対応する. 幾何学的には, $\pi(m)$ は $y = x + m$ という平面による3次元ヤング図形の断面 (slice) を表す (図3).

2.2 ヤング図形の成長列と半標準盤

対角断面を用いて, 3次元ヤング図形 π を**主対角断面** $\lambda = \pi(0)$ とその上の1対の**ヤング盤** T, T' からなる3つ組 (λ, T, T') にコーディングする.

まず, 主各断面の左側の対角断面列

$$\pi_{\leq 0} = \{\pi(-m)\}_{m=0}^{\infty}$$

と右側の対角断面列

$$\pi_{\geq 0} = \{\pi(m)\}_{m=0}^{\infty}$$

に注目する. これらは \emptyset から λ に至るヤング図形の成長列

$$\begin{aligned} \emptyset &\subseteq \cdots \subseteq \pi(-n) \subseteq \pi(-n+1) \subseteq \cdots \subseteq \lambda, \\ \emptyset &\subseteq \cdots \subseteq \pi(n) \subseteq \pi(n-1) \subseteq \cdots \subseteq \lambda \end{aligned}$$

を定める. 実際には, 隣り合った対角断面は単なる包含関係よりも強い条件

$$\pi(-n) \prec \pi(-n+1), \quad \pi(n-1) \succ \pi(n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たしている. \succ は**交錯関係** (interlacing relation) [6, 11] と呼ばれるもので, 一般に $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ と $\mu = (\mu_i)_{i=1}^{\infty}$ に対して

$$\lambda \succ \mu \iff \lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots$$

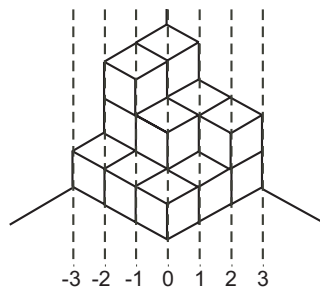


図3: 3次元ヤング図形の対角断面

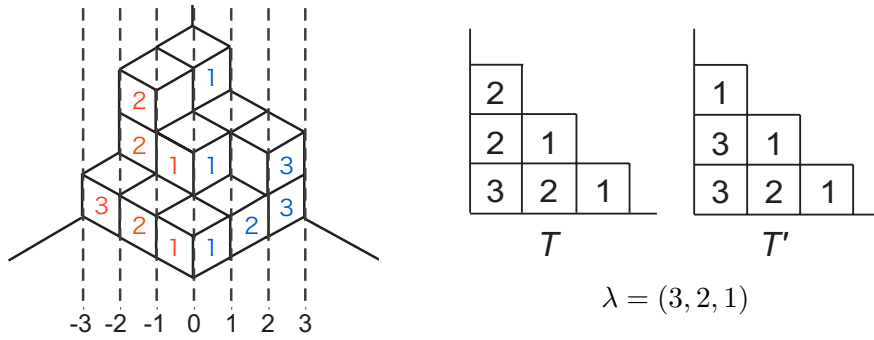


図 4: 3次元ヤング図形から決まる3つ組 (λ, T, T')

と定義される. 歪ヤング図形 λ/μ (λ, μ の定める2つのヤング図形の差集合) を横1行のヤング図形に分けて考えれば, $\lambda \succ \mu$ はこれらの1行ヤング図形の水平の辺が互いに重ならない (すなわち, いわゆる horizontal strip[10] をなす) という条件と同値である. 逆に, このような交錯関係にあるヤング図形の成長列から3次元ヤング図形が復元できるので, 3次元ヤング図形 π はヤング図形 λ とヤング図形の成長列 $\pi_{\leq 0}, \pi_{\geq 0}$ からなる3つ組 $(\lambda, \pi_{\leq 0}, \pi_{\geq 0})$ に1対1対応する.

次に, ヤング図形の成長列からヤング図形 λ 上のヤング盤 T, T' を定める. T, T' はヤング図形 λ の各箱に正整数を書き込んだ一種の表

$$T = \{T(i, j)\}_{(i, j) \in \lambda}, \quad T' = \{T'(i, j)\}_{(i, j) \in \lambda}$$

であり,

$$\begin{aligned} T(i, j) = n &\iff (i, j) \in \pi(-n+1)/\pi(-n), \\ T'(i, j) = n &\iff (i, j) \in \pi(n-1)/\pi(n), \end{aligned}$$

すなわちが歪ヤング図形 $\pi(\pm n \mp 1)/\pi(\pm n)$ に属する箱に対して n を書き込むことによって得られる (図4). T, T' は次の条件を満たす**半標準盤** (通常とは増減が逆だが [10]) になる:

$$\begin{array}{ccc} T(i, j) & \geq & T(i, j+1) & & T'(i, j) & \geq & T'(i, j+1) \\ \vee & & & & \vee & & \\ T(i+1, j) & & & & T'(i+1, j) & & \end{array}$$

これは隣り合う対角断面の交錯関係からの帰結である. 逆に, λ 型の任意の半標準盤の対 T, T' から, λ を主対角断面とする平面分割が復元できる. こうして, 平面分割 π は (λ, T, T') という3つ組と1対1対応する.

2.3 分配関数を3つ組 (λ, T, T') に関する総和とみなす

平面分割 π のボルツマン重み $q^{|\pi|}$ は

$$q^{|\pi|} = q^T q^{T'},$$

$$q^T = \prod_{n=1}^{\infty} q^{(n-1/2)(|\pi(-(n-1))| - |\pi(-n)|)},$$

$$q^{T'} = \prod_{n=1}^{\infty} q^{(n-1/2)(|\pi(n-1)| - |\pi(n)|)}$$

というように因子分解される。したがって、分配関数は $\lambda \in \mathcal{P}$ に関する総和と λ 型半標準盤全体の集合 $\mathcal{T}(\lambda)$ にわたる部分和に分解できる：

$$Z = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} q^T \right) \left(\sum_{T' \in \mathcal{T}(\lambda)} q^{T'} \right).$$

ここに現れた T, T' に関する部分和は無変数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ のシュア函数 $s_\lambda(\mathbf{x})$ の特殊値である。シュア函数は

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} \mathbf{x}^T, \quad \mathbf{x}^T = \prod_{(i,j) \in \lambda} x_{T(i,j)}$$

というヤング盤表示をもつ [10]. \mathbf{x} を

$$q^{-\rho} = (q^{1/2}, q^{3/2}, \dots, q^{n-1/2}, \dots)$$

に特殊化したものはちょうど前述の部分和になる：

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} q^T = \sum_{T' \in \mathcal{T}(\lambda)} q^{T'} = s_\lambda(q^{-\rho}).$$

2.4 分配関数の最終的表示

T, T' に関する部分和が $s_\lambda(q^{-\rho})$ という形にまとまるので、分配関数はその2乗を分割全体の集合 \mathcal{P} にわたって総和したもの

$$Z = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho})^2$$

になる。これは一種のランダム分割模型である。要するに、対角断面の方法によってランダム平面分割模型である溶解結晶模型がランダム分割模型に帰着したのである。

この総和はシュア函数に対するコーシー等式 [10]

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(x_1, x_2, \dots) s_\lambda(y_1, y_2, \dots) = \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - x_i y_j)^{-1}$$

によって実行できて、次のような無限乗積表示が得られる（右辺の函数は MacMahon 函数と呼ばれる）。

$$Z = \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - q^{i+j-1})^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-n}$$

この結果はよく知られた分割の数え上げ母関数

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}$$

に似ていて、無限積の各項のべき指数が -1 から $-n$ に変わっただけ、と言えなくもないが、背後の仕組みはまったく異なる。

3 外部ポテンシャルによる変形

3.1 簡単な変形

正值パラメータ Q を導入して、 $Q^{|\pi(0)|}$ という因子をボルツマン重みに乗じた分配関数

$$Z = \sum_{\pi \in \mathcal{PP}} q^{|\pi|} Q^{|\pi(0)|}$$

を考えることもできる。これは $|\pi(0)|$ を外部ポテンシャル、 $\log Q$ を結合定数とする模型の変形とみなせる。対角断面の方法はこの場合にもそのまま適用できて、

$$Z = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_{\lambda} (q^{-\rho})^2 Q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - Qq^n)^{-n}$$

という無限乗積表示が得られる。ここに現れた関数も MacMahon 関数と呼ばれる。

3.2 外部ポテンシャルの系列

可積分階層に関する変形を得るために、整数値の離散変数 s に依存するポテンシャルの系列

$$\Phi_k(\lambda, s) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(\lambda_i + s - i + 1)} - \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(-i + 1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

を考える。ただし、これは形式的表現 ($|q| > 1$ では収束するが、これは分配関数の収束域 $|q| < 1$ とは重ならない) であり、正確には総和を

$$\Phi_k(\lambda, s) = \sum_{i=1}^{\infty} (q^{k(\lambda_i + s - i + 1)} - q^{k(s - i + 1)}) + \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(s - i + 1)} - \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(-i + 1)}$$

というように組み替えて解釈する。最初の総和は有限和になり、後の2つの総和の項は有限個を除いて互いに打ち消し合う。最初の形式的表現の引き算項も、この解釈の仕方、後述するフェルミオンフォック空間上の作用素の**正規順序**に由来する。

こうして再定義された $\Phi_k(\lambda, s)$ は

$$\Phi_k(\lambda, s) = \sum_{i=1}^{\infty} (q^{k(\lambda_i + s - i + 1)} - q^{k(s - i + 1)}) + \frac{1 - q^{ks}}{1 - q^k} q^k$$

と表せる。 s は戸田格子の格子座標の役割を果たす。

3.3 変形された分配関数

結合定数の組 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ を導入してポテンシャル $\Phi_k(\lambda, s)$ の線形結合

$$\Phi(\lambda, s, \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \Phi_k(\lambda, s)$$

をつくり, それによって分配関数を次のように変形する [1, 2].

$$Z(s, \mathbf{t}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda (q^{-\rho})^2 Q^{|\lambda|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\lambda, s, \mathbf{t})}$$

$Q^{|\lambda|}$ も s に依存する形 $Q^{|\lambda|+s(s+1)/2}$ に修正されたことに注意されたい. この分配関数が 1次元戸田階層と関係すること [1, 2] を説明するために, 分配関数のフェルミオン表示を用いる.

4 フェルミオン表示と可積分構造

4.1 フェルミオン演算子とフォック空間

分配関数をフェルミオン表示するために以下のものを用意する [1, 2, 6, 11, 12].

- 2次元複素自由フェルミ場 $\psi(z), \psi^*(z)$ のフーリエモードとして得られる生成消滅演算子 ψ_n, ψ_n^* ($n \in \mathbf{Z}$) の代数

$$\begin{aligned} \psi_m \psi_n^* + \psi_n^* \psi_m &= \delta_{m+n, 0}, \\ \psi_m \psi_n + \psi_n \psi_m &= \psi_m^* \psi_n^* + \psi_n^* \psi_m^* = 0 \end{aligned}$$

- フォック空間のチャージ s の部分空間における基底状態

$$\langle s | = \langle -\infty | \cdots \psi_{s-1}^* \psi_s^*, \quad |s\rangle = \psi_{-s} \psi_{-s+1} \cdots |-\infty\rangle$$

と励起状態 (分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ でラベル付けされる)

$$\langle \lambda, s | = \langle -\infty | \cdots \psi_{\lambda_2+s-1}^* \psi_{\lambda_1+s}^*, \quad |\lambda, s\rangle = \psi_{-\lambda_1-s} \psi_{-\lambda_2-s+1} \cdots |-\infty\rangle$$

からなる正規直交系

- フェルミオン演算子の特別な 2 次形式

$$L_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n : \psi_{-n} \psi_n^* :, \quad H_k = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{kn} : \psi_{-n} \psi_n^* :, \quad J_k = \sum_{n \in \mathbf{Z}} : \psi_{-n} \psi_{n+k}^* :$$

ここで: $:$ は $\langle 0 |, |0\rangle$ に関する正規順序を表す. すなわち,

$$: \psi_{-n} \psi_m^* : = \psi_{-n} \psi_m^* - \langle 0 | \psi_{-n} \psi_m^* | 0 \rangle$$

- 頂点作用素

$$\Gamma_{\pm}(z) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} J_{\pm k} \right), \quad \Gamma_{\pm}(x_1, x_2, \dots) = \Gamma_{\pm}(x_1) \Gamma_{\pm}(x_2) \cdots,$$

$$\Gamma_{\pm}(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^{\infty} \Gamma_{\pm}(q^{i-1/2})$$

4.2 分配函数のフェルミオン表示

$L_0, H_k, J_k, \Gamma_{\pm}(z)$ のフォック空間への作用はチャージを保つ. L_0, H_k は互いに可換で $|\lambda, s\rangle$ を固有ベクトルにもち,

$$L_0|\lambda, s\rangle = (|\lambda| + s(s+1)/2)|\lambda, s\rangle, \quad H_k|\lambda, s\rangle = \Phi_k(\lambda, s)|\lambda, s\rangle$$

となる. これから分配函数のポテンシャル部分が

$$Q^{|\lambda|+s(s+1)/2}e^{\Phi(\lambda, s, \mathbf{t})} = \langle \lambda, s | Q^{L_0} e^{H(\mathbf{t})} | \lambda, s \rangle,$$

$$H(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k,$$

と表せることがわかる. これを行列要素の言葉で言い換えれば

$$\langle \lambda, s | Q^{L_0} e^{H(\mathbf{t})} | \mu, s \rangle = Q^{|\lambda|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\lambda, s, \mathbf{t})} \delta_{\lambda\mu}$$

となる.

他方, J_k はハイゼンベルグ代数の交換関係

$$[J_m, J_n] = m\delta_{m+n, 0}$$

を満たす. それから構成される多変数頂点作用素 $\Gamma_{\pm}(\mathbf{x})$ の行列要素は

$$\langle \mu, s | \Gamma_+(\mathbf{x}) | \lambda, s \rangle = \langle \lambda, s | \Gamma_-(\mathbf{x}) | \mu, s \rangle = s_{\lambda/\mu}(\mathbf{x})$$

というように歪シューア函数になる [10, 12]. 特に, ボルツマン重みの構成要素 $s_{\lambda}(q^{-\rho})$ は

$$s_{\lambda}(q^{-\rho}) = \langle s | \Gamma_+(q^{-\rho}) | \lambda, s \rangle = \langle \lambda, s | \Gamma_-(q^{-\rho}) | s \rangle$$

と表せる.

以上のことから, 分配函数は

$$Z = \sum_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} \langle s | \Gamma_+(q^{-\rho}) | \lambda, s \rangle \langle \lambda, s | Q^{L_0} e^{H(\mathbf{t})} | \mu, s \rangle \langle \mu, s | \Gamma_-(q^{-\rho}) | s \rangle$$

と表せる. $\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} |\lambda, s\rangle \langle \lambda, s|$ と $\sum_{\mu \in \mathcal{P}} |\mu, s\rangle \langle \mu, s|$ はチャージ s の部分空間における 1 の分解であるから, 結局, 次のような**分配函数のフェルミオン表示**が得られる [1, 2].

$$Z(s, \mathbf{t}) = \langle s | \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} e^{H(\mathbf{t})} \Gamma_-(q^{-\rho}) | s \rangle$$

これは一見, 戸田階層の τ 函数のフェルミオン表示 [13] に似ているが, 構造はまったく異なる. τ 函数では $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho})$ のところに時間変数に依存する作用素が現れるのに対して, 上の分配函数の表示では中央の $Q^{L_0} e^{H(\mathbf{t})} = e^{H(\mathbf{t})} Q^{L_0}$ が時間変数 \mathbf{t} に依存する.

4.3 1次元戸田階層の τ 関数との関係

2重の添え字 $k, m \in \mathbf{Z}$ をもつフェルミオン演算子の2次形式

$$V_m^{(k)} = q^{k/2} \oint_{|z|=R} \frac{dz}{2\pi i} z^m : \psi(q^{k/2} z) \psi^*(q^{-k/2} z) : = q^{-km/2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{kn} : \psi_{m-n} \psi_n^* :$$

を考える. H_k, J_k はその一部として

$$H_k = V_0^{(k)}, \quad J_k = V_k^{(0)}$$

というように含まれている. $V_m^{(k)}$ は

$$[V_m^{(k)}, V_n^{(l)}] = \begin{cases} (q^{(lm-kn)/2} - q^{(kn-lm)/2})(V_{m+n}^{(k+l)} - \delta_{m+n,0} \frac{q^{k+l}}{1-q^{k+l}}) & \text{if } k+l \neq 0, \\ (q^{-k(m+n)} - q^{k(m+n)})V_{m+n}^{(0)} + m\delta_{m+n,0} & \text{if } k+l = 0. \end{cases}$$

という交換関係を満たして, **量子トーラス代数**の実現を与える.

さらに $V_m^{(k)}$ は次の2種類の代数的関係式も満たす. これらを**シフト対称性**という [1, 2].

(i) $k > 0, m \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} \Gamma_+(q^{-\rho}) \left(V_m^{(k)} - \frac{q^k \delta_{m,0}}{1-q^k} \right) \Gamma_+(q^{-\rho})^{-1} \\ = (-1)^k \Gamma_-(q^{-\rho})^{-1} \left(V_{m+k}^{(k)} - \frac{q^k \delta_{m+k,0}}{1-q^k} \right) \Gamma_-(q^{-\rho}) \end{aligned}$$

(ii) $k, m \in \mathbf{Z}$ に対して

$$q^{W_0/2} V_m^{(k)} q^{-W_0/2} = V_m^{(k-m)}$$

ここで

$$W_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n^2 : \psi_{-n} \psi_n^* :$$

このシフト対称性から $H_k = V_0^{(k)}$ と $J_k = V_k^{(0)}$ を結ぶ関係式

$$\begin{aligned} (-1)^k J_k \cdot q^{W_0/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) q^{W_0/2} \\ = q^{W_0/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} \left(H_k - \frac{q^k}{1-q^k} \right) \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) q^{W_0/2} \\ = q^{W_0/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) q^{W_0/2} \cdot (-1)^k J_{-k} \end{aligned}$$

が得られる. これを用いて $Z(s, t)$ のフェルミオン表示の中央にある $e^{t_k H_k}$ を作用素積の左端や右端へ移動することができる. こうして次のような**1次元戸田階層の τ 関数**との関係がわかる.

定理 [1, 2] $Z(s, t)$ は

$$g = q^{W_0/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) q^{W_0/2}$$

という生成作用素から得られる 1 次元戸田階層の τ 函数

$$\tau(s, t) = \langle s | \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k \right) g | s \rangle = \langle s | g \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_{-k} \right) | s \rangle$$

によって次のように表せる：

$$Z(s, t) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k q^k}{1 - q^k} \right) q^{-s(s+1)(2s+1)/6} \tau(s, \iota(t)),$$

$$\iota(t) = (-t_1, t_2, -t_3, \dots, (-1)^k t_k, \dots)$$

注意 シフト対称性によって $Z(s, t)$ を 2 通りに書き換えられることから、 $\tau(s, t)$ が上に示した 2 通りの表示をもつことがわかるが、実際には g 自体が

$$J_k g = g J_{-k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

という等式を満たすこともわかる。これもシフト対称性からの帰結である。一般に、この等式 (**1 次元戸田階層への簡約条件**) のもとで、2 次元戸田階層の τ 函数のフェルミオン表示 [13]

$$\tau(s, t, \bar{t}) = \langle s | \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k \right) g \exp \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k J_{-k} \right) | s \rangle$$

は

$$\tau(s, t, \bar{t}) = \langle s | \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \bar{t}_k) J_k \right) g | s \rangle = \langle s | g \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \bar{t}_k) J_k \right) | s \rangle$$

というように書き直されて、 s と $t - \bar{t}$ のみの函数 $\tau(s, t - \bar{t})$ 、すなわち 1 次元戸田階層の τ 函数に帰着する。

5 溶解結晶模型の変種

5.1 コニフォルドに関連する溶解結晶模型

位相的弦理論 [14] では、コニフォルド (resolved conifold) と呼ばれる 3 次元カラビ・ヤウ多様体に関連して、ボルツマン重みを

$$s_\lambda(q^{-\rho})^2 \rightarrow s_\lambda(q^{-\rho}) s_{t_\lambda}(q^{-\rho})$$

(t_λ は λ の**共役**、すなわちヤング図形の**転置**を表す) というように置き換えた分配函数

$$Z' = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho}) s_{t_\lambda}(q^{-\rho}) Q^{|\lambda|}$$

も登場する [15]. この分配関数はもう 1 つのコーシー等式

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_{\lambda}(x_1, x_2, \dots) s_{t\lambda}(y_1, y_2, \dots) = \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 + x_i y_j)$$

によって次のような無限乗積に書き直せる (すなわち, MacMahon 関数の逆数になる).

$$Z' = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + Qq^n)^n$$

可積分構造の考察対象となるのは, この分配関数を次のように 2 系列の外部ポテンシャル $\Phi_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots$, $\Phi_{-k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots$ によって変形したものである.

$$\begin{aligned} Z'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_{\lambda}(q^{-\rho}) s_{t\lambda}(q^{-\rho}) Q^{|\lambda|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\lambda, s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})}, \\ \Phi(\lambda, s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) &= \sum_{k=1}^{\infty} t_k \Phi_k(\lambda, s) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k \Phi_{-k}(\lambda, s) \end{aligned}$$

2 系列のポテンシャルに対応して 2 系列の結合定数 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$, $\bar{\mathbf{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots)$ を導入した. これらの結合定数を時間変数として, この分配関数は **2次元戸田階層** の τ 関数と関係している. その証明にはやはりシフト対称性を利用する [3]. 実際には, この τ 関数は **Ablowitz-Ladik 階層** (あるいはそれと同値な**相対論的戸田階層**) と関係していることがわかるが, その証明は Lax 作用素の構造を調べることによって行われる [4].

5.2 分配関数のフェルミオン表示

あらたに

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\pm}(z) &= \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k} J_{\pm k}\right) = \Gamma_{\pm}(-z)^{-1}, \\ \Gamma'_{\pm}(x_1, x_2, \dots) &= \Gamma'_{\pm}(x_1) \Gamma'_{\pm}(x_2) \cdots, \quad \Gamma'_{\pm}(q^{-\rho}) = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma'_{\pm}(q^{n-1/2}) \end{aligned}$$

という頂点作用素を導入する [16]. その行列要素は

$$\langle \mu, s | \Gamma'_{+}(\mathbf{x}) | \lambda, s \rangle = \langle \lambda, s | \Gamma'_{-}(\mathbf{x}) | \lambda, s \rangle = s_{t\lambda/t\mu}(\mathbf{x})$$

となる. これとすでに導入した $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho})$ を組み合わせれば, 分配関数 $Z'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ に対して次のようなフェルミオン表示が得られる.

$$Z'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \langle s | \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} e^{H(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})} \Gamma'_-(q^{-\rho}) | s \rangle,$$

$$H(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k H_{-k}$$

これを2次元戸田階層の τ 関数に書き直すには、前述の (i), (ii) 型のシフト対称性に加えて、次の型のシフト対称性も用いる [3].

(iii) $k > 0, m \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\Gamma'_+(q^{-\rho}) \left(V_m^{(-k)} + \frac{1}{1-q^k} \delta_{m,0} \right) \Gamma'_+(q^{-\rho})^{-1}$$

$$= \Gamma'_-(q^{-\rho})^{-1} \left(V_{m+k}^{(-k)} + \frac{1}{1-q^k} \delta_{m+k,0} \right) \Gamma'_-(q^{-\rho}).$$

上付き添え字の動く範囲が (i) 型と (iii) 型では異なることに注意されたい.

これらのシフト対称性から、 $k > 0$ にわたって次の等式が成立することがわかる：

$$(-1)^k J_k \cdot q^{W_0/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) = q^{W_0/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) \left(H_k - \frac{q^k}{1-q^k} \right),$$

$$\left(H_{-k} + \frac{1}{1-q^k} \right) \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) q^{-W_0/2} = \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) q^{-W_0/2} \cdot J_{-k}.$$

これらを用いて $Z'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ のフェルミオン表示の中央にある $e^{t_k H_k}$ を作用素積の左端へ、 $e^{\bar{t}_k H_{-k}}$ を右端へ移動することができる (逆向きに移動することはできない).

こうして次のような2次元戸田階層の τ 関数との関係がわかる.

定理 [3] $Z'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ は

$$g' = q^{W_0/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) q^{-W_0/2}$$

という生成作用素から得られる2次元戸田階層の τ 関数

$$\tau'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \langle s | \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k \right) g' \exp \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k J_{-k} \right) | s \rangle,$$

によって次のように表せる：

$$Z'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k q^k - \bar{t}_k}{1-q^k} \right) \tau'(s, \iota(\mathbf{t}), -\bar{\mathbf{t}})$$

5.3 Lax 作用素の構造

以下では、2次元戸田階層のLax作用素を $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 行列

$$L = \Lambda + u_1 + u_2 \Lambda^{-1} + \cdots, \quad \bar{L}^{-1} = \bar{u}_0 \Lambda^{-1} + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \Lambda + \cdots$$

として扱う. Λ^n はシフト行列

$$\Lambda^n = \sum_{i \in \mathbf{Z}} E_{i, i+n}$$

を表し, u_n, \bar{u}_n は対角行列

$$u_n = \sum_{i \in \mathbf{Z}} u_n(i) E_{ii}, \quad \bar{u}_n = \sum_{i \in \mathbf{Z}} \bar{u}_n(i) E_{ii},$$

である. E_{ij} は (i, j) 要素のみ 1, 他の要素は 0 の行列である.

$Z(s, t)$ に付随する τ 関数 $\tau(s, t)$ は 1 次元戸田階層の解であり, よく知られているように, Lax 作用素は

$$L = \bar{L}^{-1} = \Lambda + b + c\Lambda^{-1}$$

(b, c は対角行列, 今の場合には $b = u_1, c = \bar{u}_0$) という形をした 3 重対角行列である. $Z'(s, t, \bar{t})$ に付随する τ 関数 $\tau'(s, t, \bar{t})$ が定める 2 次元戸田階層の解はそれとはまったく異質の, 次のような特徴をもつ.

定理 [4] $\tau'(s, t, \bar{t})$ が定める 2 次元戸田階層の解の Lax 作用素は

$$\begin{aligned} L &= BC^{-1}, & \bar{L}^{-1} &= -CB^{-1}, \\ B &= \Lambda + b, & C &= 1 + c\Lambda^{-1} \end{aligned}$$

というように因子分解された形をもつ. ここで b, c は対角行列であり, C^{-1} と B^{-1} はそれぞれ

$$C^{-1} = 1 - c\Lambda^{-1} + \dots, \quad B^{-1} = b^{-1} - b^{-1}\Lambda b^{-1} + \dots$$

という展開をもつ下三角行列・上三角行列を意味する.

この因子分解された形 (上の B^{-1}, C^{-1} の解釈から, $\bar{L} = -L$ という自明な場合に退化しないことがわかる) は Ablowitz-Radik 階層 (実際には相対論的戸田階層) を 2 次元戸田階層の簡約系として特徴付ける条件 [17] に他ならない. こうして, $\tau'(s, t, \bar{t})$ が Ablowitz-Radik 階層の解を定める τ 関数であることがわかる.

もともと Brini ら [17] はコニフォルドの Gromov-Witten 理論 (物理的には位相的弦理論) が Ablowitz-Ladik 階層と関係するという予想 [18] から出発して, ミラー理論 (Frobenius 構造) の観点から予想を解決する試みの中で, Ablowitz-Radik 階層自体の研究も行った. 上の結果は Brini らの予想に別の方向から答えるものである.

以下では上の結果の証明 [4] のアイデアを紹介する.

5.4 無限行列表示

L, \bar{L}^{-1} の因子分解形を導くために, フェルミオン 2 次形式と $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 行列の対応 [12]

$$\hat{X} = \sum_{i, j \in \mathbf{Z}} x_{ij} : \psi_{-i} \psi_j^* : \longleftrightarrow X = \sum_{i, j \in \mathbf{Z}} x_{ij} E_{ij}$$

を利用する. この対応によって L_0, W_0, H_k, J_k は

$$L_0 = \Delta, \quad W_0 = \Delta^2, \quad H_k = q^{k\Delta}, \quad J_k = \Lambda^k$$

というように行列表現される. ここで Δ は

$$\Delta = \sum_{i \in \mathbf{Z}} i E_{ii}$$

という対角行列である. Λ と Δ は差分作用素に基づく Lax 形式では e^{∂_s} と s に対応していて,

$$[\Lambda, \Delta] = \Lambda$$

という交換関係を満たす.

フェルミオン 2 次形式と $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 行列の対応はリー代数の構造を保っている (正確に言えば, 1 次元中心拡大の部分の無視している). これをリー群に持ち上げることもできる. これによって $e^{\tilde{X}}$ と e^X が対応する [12]. たとえば, 頂点作用素 $\Gamma_{\pm}(z), \Gamma'_{\pm}(z)$ は

$$\Gamma_{\pm}(z) = (1 - z\Lambda^{\pm 1})^{-1}, \quad \Gamma'_{\pm}(z) = 1 + z\Lambda^{\pm 1}$$

というように行列表示される (行列表示の方も同じ記号で表そう). $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho})$ と $\Gamma'_{\pm}(q^{-\rho})$ はこのような行列の無限乗積になる:

$$\Gamma_{\pm}(q^{-\rho}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-1/2}\Lambda^{\pm 1})^{-1},$$

$$\Gamma'_{\pm}(q^{-\rho}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2}\Lambda^{\pm 1})$$

これらの無限乗積は行列値の量子ダイログ関数 [19, 20] とみなすことができる. (i) 型と (iii) 型のシフト対称性はこの無限乗積構造からの帰結としても説明できる.

ちなみに, τ 関数のフェルミオン表示では $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho}), \Gamma'_{\pm}(q^{-\rho})$ が $\Gamma_- \Gamma_+$ や $\Gamma'_- \Gamma'_+$ のような組合せで現れる. これは Jacobi の 3 重積公式

$$\vartheta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2}z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2}z^{-1}),$$

を通じて楕円テータ関数との関係を暗示している.

5.5 Lax 作用素の因子分解形の証明の方針

上の対応によって, $\tau'(s, t, \bar{t})$ を定める作用素 g' は

$$U = q^{\Delta^2/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{\Delta} \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) q^{-\Delta^2/2}$$

という無限行列に対応する.

一般に, このような行列 U に対して

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \Lambda^k\right) U \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k \Lambda^{-k}\right) = W^{-1} \bar{W}$$

という等式を満たす下三角行列 W (対角成分 1) と上三角行列 \bar{W} を求めること (分解問題) ができれば, W, \bar{W} 自体は 2 次元戸田階層の佐藤方程式を満たす. それらから

$$L = W\Lambda W^{-1}, \quad \bar{L}^{-1} = \bar{W}\Lambda^{-1}\bar{W}^{-1}$$

というように定義される L, \bar{L}^{-1} は Lax 方程式を満たす. 特に, U が τ 関数のフェルミオン表示 [13] における生成作用素 g の表現行列ならば, L, \bar{L} は τ 関数に対応する Lax 形式での戸田階層の解に他ならない [21, 22, 23].

U から W, \bar{W} を直接に求めることは一般的には困難だが, 今の場合には U が特殊な行列なので, 初期時刻 $t = \bar{t} = 0$ においてこの分解問題が具体的に解ける. それから L, \bar{L}^{-1} が初期時刻において前述の因子分解形をもつことがわかる. 他方, Brini らが示しているように [17], 因子分解形は時間発展で保たれる. こうして, すべての時刻において L, \bar{L}^{-1} が求める形をしていることがわかるのである.

5.6 オービフォールド型溶解結晶模型

最近, これまで解説してきた結果をオービフォールド型溶解結晶模型に拡張することができた [5]. これらは 3 次元カラビ・ヤウ多様体の $\mathbf{Z}_a \times \mathbf{Z}_b$ オービフォールド (a, b は正整数) の位相的不変量に由来する模型である [24].

外部ポテンシャルを入れて変形する前の模型の分配関数は

$$Z_{a,b} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(p_1 q^{-\rho}, \dots, p_a q^{-\rho}) s_\lambda(r_1 q^{-\rho}, \dots, r_b q^{-\rho}) Q^{|\lambda|},$$

$$Z'_{a,b} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(p_1 q^{-\rho}, \dots, p_a q^{-\rho}) s_{t\lambda}(r_1 q^{-\rho}, \dots, r_b q^{-\rho}) Q^{|\lambda|}.$$

という形をしている. p_1, p_2, \dots, p_a と r_1, r_2, \dots, r_b は模型のパラメータである. 要するに, これらは Z, Z' のボルツマン重みに対して

$$s_\lambda(q^{-\rho})^2 \rightarrow s_\lambda(p_1 q^{-\rho}, \dots, p_a q^{-\rho}) s_\lambda(r_1 q^{-\rho}, \dots, r_b q^{-\rho})$$

ならびに

$$s_\lambda(q^{-\rho}) s_{t\lambda}(q^{-\rho}) \rightarrow s_\lambda(p_1 q^{-\rho}, \dots, p_a q^{-\rho}) s_{t\lambda}(r_1 q^{-\rho}, \dots, r_b q^{-\rho}).$$

という置き換えを行ったものである. これらのシューア関数は, 無限個の引数を a 組や b 組の無限変数に組み分けしただけで, これまで考えていたものと同じである (シューア関数は対称関数なので, このような組み分けは自在にできる). さらに, シューア関数の斉次性によってパラメータの組 p_1, \dots, p_a と r_1, \dots, r_b の中の一つ, たとえば p_a と r_b は 1 に正規化できる.

$Z(s, t), Z'(s, t, \bar{t})$ の場合にならって外部ポテンシャルで変形した分配関数 $Z_{a,b}(s, t), Z'_{a,b}(s, t, \bar{t})$ はいずれも 2 次元戸田階層のある τ 関数 $\tau_{a,b}, \tau'_{a,b}$ と関係している. さらに, Lax 形式で見た解は次のような特徴をもつ.

1. $\tau_{a,b}$ に対応する Lax 作用素に対して

$$L^a = D^{-1} \bar{L}^{-b}$$

という等式が成立する。 D は模型のパラメータから決まる定数である。この等式の両辺は

$$\Lambda^a + \alpha_1 \Lambda^{a-1} + \cdots + \alpha_{a+b} \Lambda^{-b}$$

($\alpha_1, \dots, \alpha_{a+b}$ は対角行列) という形の $a+b$ 重対角行列になる。これは2次元戸田階層の (a, b) 型簡約として知られる可積分階層 (**bi-graded Toda hierarchy**) [25, 26] を特徴づけるものである。 t はこの可積分階層の時間変数 (2系列あるが) の一部と対応する。

2. $\tau'_{a,b}$ に対応する Lax 作用素のべき乗 L^a, \bar{L}^{-b} は因子分解された形

$$L^a = BC^{-1}, \quad \bar{L}^{-b} = DCB^{-1}$$

をもつ。ここで B, C は

$$B = \Lambda^a + \beta_1 \Lambda^{a-1} + \cdots + \beta_a, \quad C = 1 + \gamma_1 \Lambda^{-1} + \cdots + \gamma_b \Lambda^{-b}$$

(β_i, γ_j は対角行列) という行列、 D は模型のパラメータから決まる定数である。 Brini らが示したように [27], $a = b = 1$ の場合と同様、この因子分解形も時間発展で保たれて、2次元戸田階層の一種の簡約を定める。ただし、 t, \bar{t} はそれぞれ2次元戸田階層の2系列の時間変数の一部と対応する。 Brini らはコニフォールドのオービフォールドの Gromov-Witten 理論においてこの形の簡約系が現れることを Frobenius 構造の観点から論じている [27]。上の模型は彼らの結果を別の方向から説明するものと考えられる。

6 まとめ

1. 溶解結晶模型は3次元ヤング図形の統計力学的模型 (ランダム平面分割模型) であるが、対角断面の方法によって一種のランダム分割模型に書き直せる。
2. 1系列の外部ポテンシャルによって変形した分配函数は1次元戸田階層の τ 函数に簡単な函数をかけたものになる。このことを示すために分配函数をフェルミオン表示し、量子トーラス代数のフェルミオン実現における特別な代数的関係式を利用する。
3. ボルツマン重みを少し変更することによって溶解結晶模型の変種が得られる。分配函数を2系列の外部ポテンシャルによって変形したものは2次元戸田階層の τ 函数になる。さらに、ラックス形式における考察から Ablowitz-Ladik (相対論的戸田) 階層との関係がわかる。
4. ランダム行列との比較の観点では、これら2つの溶解結晶模型はエルミート行列模型とユニタリ行列模型に対応する。
5. これらの結果はオービフォールド版の模型にも拡張される。

参考文献

- [1] T. Nakatsu and K. Takasaki, Commun. Math. Phys. **285** (2009), 445–468, arXiv:0710.5339 [hep-th].
- [2] T. Nakatsu and K. Takasaki, Integrable structure of melting crystal model with external potentials, Adv. Stud. Pure Math. vol. 59, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2010, pp. 201–223, arXiv:0807.4970 [math-ph].
- [3] K. Takasaki, Integrable structure of modified melting crystal model, arXiv:1208.4497 [math-ph].
- [4] K. Takasaki, Modified melting crystal model and Ablowitz-Ladik hierarchy, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013), 245202 (23 pages), arXiv:1302.6129 [math-ph].
- [5] K. Takasaki, Orbifold melting crystal models and reductions of Toda hierarchy, arXiv:1410.5060 [math-ph].
- [6] A. Okounkov, N. Reshetikhin and C. Vafa, Quantum Calabi-Yau and classical crystals, P. Etingof, V. Retakh and I.M. Singer (eds.), *The unity of mathematics*, Progr. Math. vol. 244 (Birkhäuser, 2006), pp. 597–618, arXiv:hep-th/0309208.
- [7] T. Maeda, T. Nakatsu, K. Takasaki and T. Tamakoshi, Five-dimensional supersymmetric Yang-Mills theories and random plane partitions, JHEP **0503** (2005), 056, arXiv:hep-th/0412327.
- [8] 高崎金久, 線形代数と数え上げ, 日本評論社, 2012.
- [9] D.M. Bressoud, Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture, Cambridge University Press, 1999.
- [10] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford University Press, 1995.
- [11] A. Okounkov and N. Reshetikhin, Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-Dimensional young diagram, J. Amer. Math. Soc. **16**, (2003), 581–603, arXiv:math.CO/0107056.
- [12] T. Miwa, M. Jimbo and E. Date, *Solitons: Differential equations, symmetries, and infinite-dimensional algebras*, Cambridge University Press, 2000.
- [13] T. Takebe, Representation theoretical meanings of the initial value problem for the Toda lattice hierarchy I, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 77–84.
- [14] M. Mariño, *Chern-Simons theory, matrix models, and topological strings*, Oxford University Press, 2005.
- [15] J. Bryan and R. Pandharipande, The local Gromov-Witten theory of curves, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 101–136, arXiv:math/0411037.

- [16] J. Bryan and B. Young, Generating functions for coloured 3D Young diagrams and the Donaldson-Thomas invariants of orbifolds, *Duke Math. J.* **152** (2010), 115–153, arXiv:0802.3948 [math.CO].
- [17] A. Brini, G. Carlet and P. Rossi, Integrable hierarchies and the mirror model of local \mathbb{CP}^1 , *Physica* **D241** (2012), 2156–2162, arXiv:1105.4508 [math-ph].
- [18] A. Brini, The local Gromov-Witten theory of \mathbb{CP}^1 and integrable hierarchies, *Commun. Math. Phys.* **313** (2012), 571–605, arXiv:1002.0582 [math-ph].
- [19] L. Faddeev and A. Yu. Volkov, Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice, *Phys. Lett.* **B315** (1993), 311–318, arXiv:hep-th/9307048.
- [20] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, Quantum dilogarithm, *Mod. Phys. Lett.* **A9** (1994), 427–434. arXiv:hep-th/9310070.
- [21] K. Takasaki, Initial value problem for the Toda lattice hierarchy, *Adv. Stud. Pure Math.* vol. 4 (Kinokuniya, Tokyo, 1984), pp. 136–163.
- [22] T. Nakatsu, K. Takasaik and S. Tsujimaru, Quantum and classical aspects of deformed $c = 1$ strings, *Nucl. Phys.* **B443** (1995), 1550-197, arXiv:hep-th/9501038.
- [23] K. Takasaki, Toda lattice hierarchy and generalized string equations, *Commun. Math. Phys.* **181** (1996), 131–156, arXiv:hep-th/9506089.
- [24] J. Bryan, C. Cadman and B. Young, The orbifold topological vertex, *Adv. Math.* **229** (1) (2012), 531–595. arXiv:1008.4205 [math.AG].
- [25] B. A. Kupersmidt, *Discrete Lax equations and differential-difference calculus*, Asterisque No. 123 (Société Mathématique de France, Paris, 1985).
- [26] G. Carlet, The extended bigraded Toda hierarchy, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), 9411–9435, arXiv:math-ph/0604024.
- [27] A. Brini, G. Carlet, S. Romano and P. Rossi, Rational reductions of the 2D-Toda hierarchy and mirror symmetry, arXiv:1401.5725 [math-ph].