

# 溶解結晶模型の可積分構造

高崎金久（近畿大学理工学部）

九州大学 IMI, 2014 年 8 月 8 日

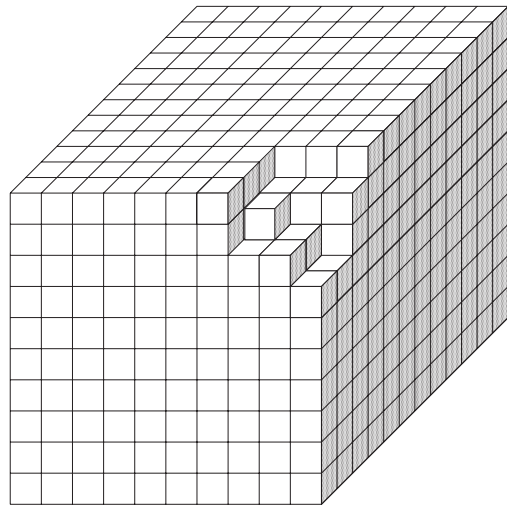
## 目次

1. 溶解結晶模型
2. 対角断面の方法
3. 外部ポテンシャルによる変形
4. フェルミオン表示と可積分構造
5. 溶解結晶模型の変種
6. まとめ

# 1. 溶解結晶模型

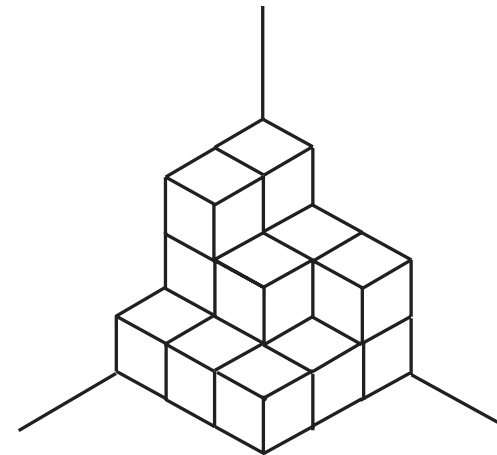
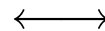
## 溶解結晶と 3次元ヤング図形

$xyz$  空間の第 1 象限を占める結晶の角が溶解する状況（現実の物理系を想定しているわけではない）を平衡統計力学系として定式化する。結晶は単位立方体からなり、第 1 象限における補集合が **3次元ヤング図形** に対応する形をしているとする。



溶解結晶

補集合



3次元ヤング図形

## 平面分割と3次元ヤング図形

- 通常の**分割** (**整数分割**) は単調減少非負整数列 (0 と異なる要素は高々有限個) である.

$$\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty} = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$$

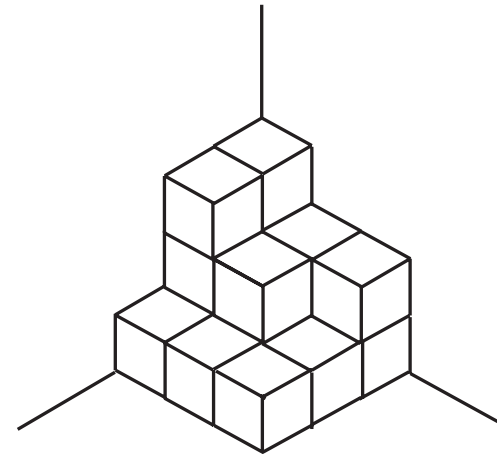
このような分割はヤング図形 ( $i$  番目の行が  $\lambda_i$  個の正方形からなる) を表す.

- **平面分割** は2方向に単調減少する非負整数の2次元配列 (0 と異なる要素は高々有限個) である.

$$\pi = (\pi_{ij})_{i,j=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \pi_{ij} \geq \pi_{i,j+1} \\ \vee \\ \pi_{i+1,j} \end{array}$$

- $\pi_{ij}$  を  $xy$  平面の上に積まれた立方体の柱の高さと解釈すれば, 3次元ヤング図形が決まる. このようにして平面分割を3次元ヤング図形と同一視する.

例:  $\pi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  の場合



- 3次元ヤング図形の体積は

$$|\pi| = \sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{ij}$$

と表せる.

## 分配函数

ボルツマン重みを  $q^{|\pi|}$  ( $0 < q < 1$ ) と定めれば, **分配函数**はこの重みを平面分割全体の集合  $\mathcal{PP}$  にわたって総和したものの

$$Z = \sum_{\pi \in \mathcal{PP}} q^{|\pi|}$$

になる. この分配函数は**対角断面 (diagonal slicing) の方法**によって計算できる.

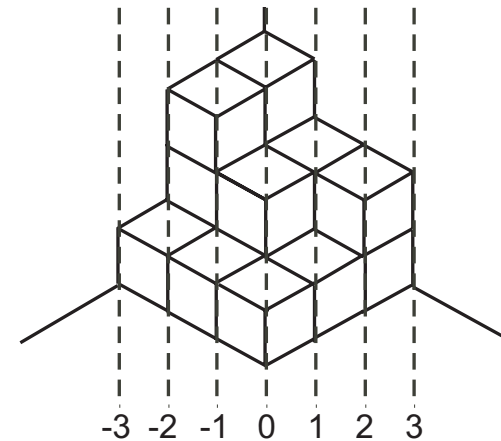
- A. Okounkov and N. Reshetikhin, J. Amer. Math. Soc. **16**, (2003), 581–603, arXiv:math.CO/0107056.
- A. Okounkov, N. Reshetikhin and C. Vafa, Progr. Math. vol. 244 (Birkhäuser, 2006), pp. 597–618, arXiv:hep-th/0309208 (3次元ヤング図形が  $x, y, z$  軸の無限遠方に柱状に延びた「足」をもつ場合も扱っている)

## 2. 対角断面の方法

### 対角断面

$\pi = (\pi_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$  に対する  $m$  番目 ( $m \in \mathbf{Z}$ ) の対角断面  $\pi(m)$  の定義：

$$\pi(m) = \begin{cases} (\pi_{i,i+m})_{i=1}^{\infty} & \text{if } m \geq 0, \\ (\pi_{j-m,j})_{j=1}^{\infty} & \text{if } m < 0 \end{cases}$$



これは1次元的な分割であり，ヤング図形としては  $y = x + m$  という平面による3次元ヤング図形の断面 (slice) を表す。

## ヤング図形の成長列と半標準盤

- **主対角断面**  $\lambda = \pi(0)$  に対して, 左側の対角断面列  $\{\pi(-m)\}_{m=0}^{\infty}$  と右側の対角断面列  $\{\pi(m)\}_{m=0}^{\infty}$  は  $\emptyset$  から  $\lambda$  に至るヤング図形の成長列

$$\emptyset \subseteq \cdots \subseteq \pi(-n) \subseteq \pi(-(n-1)) \subseteq \cdots \subseteq \lambda,$$

$$\emptyset \subseteq \cdots \subseteq \pi(n) \subseteq \pi(n-1) \subseteq \cdots \subseteq \lambda$$

を定める.

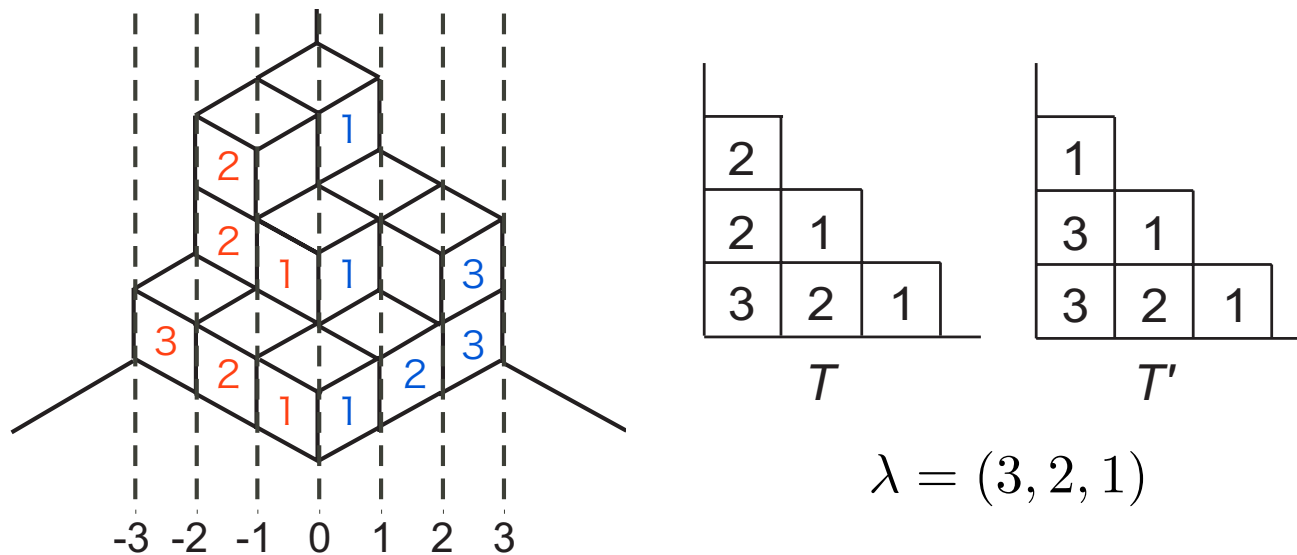
- $\lambda$  の表すヤング図形を考えて,  $n = 1, 2, \dots$  にわたって歪ヤング図形  $\pi(\pm(n-1))/\pi(\pm n)$  に属する箱  $(i, j)$  に  $n$  を書き込んで行けば, 正整数を並べた**ヤング盤**  $T = \{T(i, j)\}_{(i, j) \in \lambda}$ ,  $T' = \{T'(i, j)\}_{(i, j) \in \lambda}$  が得られる (次ページの図を参照).

- $T, T'$  は次の条件を満たす半標準盤 (通常とは増減が逆だが) になる.

$$T(i+1, j) > T(i, j) \leq T(i, j+1),$$

$$T'(i+1, j) > T'(i, j) \leq T'(i, j+1)$$

- 逆に,  $\lambda$  型の任意の半標準盤対  $T, T'$  から,  $\lambda$  を主対角断面とする平面分割が復元できる. 言い換えれば, 平面分割から  $(\lambda, T, T')$  という3つ組への写像  $\pi \mapsto (\lambda, T, T')$  は1対1である.





分配関数を3つ組  $(\lambda, T, T')$  に関する総和とみなす

ボルツマン重み  $q^{|\pi|}$  は

$$q^{|\pi|} = q^T q^{T'},$$

$$q^T = \prod_{n=1}^{\infty} q^{(n-1/2)(|\pi(-(n-1))| - |\pi(-n)|)},$$

$$q^{T'} = \prod_{n=1}^{\infty} q^{(n-1/2)(|\pi(n-1)| - |\pi(n)|)}$$

というように因子分解されるので、分配関数は  $\lambda \in \mathcal{P}$  に関する総和と  $\lambda$  型半標準盤全体の集合  $\mathcal{T}(\lambda)$  にわたる部分和に分解できる：

$$Z = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} q^T \right) \left( \sum_{T' \in \mathcal{T}(\lambda)} q^{T'} \right).$$

## 半標準盤に関する総和とシューア関数

無限変数  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$  のシューア関数  $s_\lambda(\mathbf{x})$  は

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} \mathbf{x}^T, \quad \mathbf{x}^T = \prod_{(i,j) \in \lambda} x_{T(i,j)}$$

という組合せ論的表示 (ヤング盤表示) をもつ。これによって、 $T, T' \in \mathcal{T}(\lambda)$  に関する部分和はシューア関数の特殊値として表せる：

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} q^T = \sum_{T' \in \mathcal{T}(\lambda)} q^{T'} = s_\lambda(q^{-\rho}),$$

$$q^{-\rho} = (q^{1/2}, q^{3/2}, \dots, q^{n-1/2}, \dots)$$

## 分配関数の最終的表示

$T, T'$  に関する部分和を実行して得られる和

$$Z = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_{\lambda}(q^{-\rho})^2$$

は **ランダム分割模型** の分配関数とみなせる。この総和はシューア関数に対する **コーシー等式**

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_{\lambda}(x_1, x_2, \dots) s_{\lambda}(y_1, y_2, \dots) = \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - x_i y_j)^{-1}$$

によって実行できて、いわゆる **MacMahon 関数** になる：

$$Z = \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - q^{i+j-1})^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-n}$$

### 3. 外部ポテンシャルによる変形

#### 簡単な変形

正値パラメータ  $Q$  を導入して,  $Q^{|\pi(0)|}$  という因子をボルツマン重みに乗じた分配関数

$$Z = \sum_{\pi \in \mathcal{PP}} q^{|\pi|} Q^{|\pi(0)|}$$

を考える. これは  $|\pi(0)|$  を外部ポテンシャル,  $\log Q$  を結合定数とする模型の変形と解釈される. 対角断面の方法はこの場合にもそのまま適用できて,

$$Z = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_{\lambda} (q^{-\rho})^2 Q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - Qq^n)^{-n}$$

となる (これも MacMahon 函数と呼ばれる).

## 外部ポテンシャルの系列

可積分階層に関する変形を得るために、整数値の離散変数  $s$  に依存するポテンシャルの系列

$$\Phi_k(\lambda, s) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(\lambda_i + s - i + 1)} - \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(-i + 1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

を考える。ただし、これは形式的表現であり、正確には項を

$$\begin{aligned} \Phi_k(\lambda, s) = & \sum_{i=1}^{\infty} \left( q^{k(\lambda_i + s - i + 1)} - q^{k(s - i + 1)} \right) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(s - i + 1)} - \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(-i + 1)} \end{aligned}$$

と組み替えて解釈する（この処方方はフェルミオンフォック空間上の作用素積の**正規順序**に由来する）。最初の総和は有限和になり、後の2つの総和の項は有限個を除いて互いに打ち消し合う。

こうして再定義された  $\Phi_k(\lambda, s)$  は

$$\Phi_k(\lambda, s) = \sum_{i=1}^{\infty} (q^{k(\lambda_i + s - i + 1)} - q^{k(s - i + 1)}) + \frac{1 - q^{ks}}{1 - q^k} q^k$$

と表せる.  $s$  は戸田格子の格子座標の役割を果たす.

### 変形された分配関数

結合定数の組  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$  を導入し, 次のように変形された分配関数を考える:

$$Z(s, \mathbf{t}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_{\lambda} (q^{-\rho})^2 Q^{|\lambda| + s(s+1)/2} e^{\Phi(\lambda, s, \mathbf{t})},$$

$$\Phi(\lambda, s, \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \Phi_k(\lambda, s)$$

## 1次元戸田階層との関係

K.T. and T. Nakatsu, Commun. Math. Phys. **285** (2009), 445–468,  
arXiv:0710.5339 [hep-th]

$Z(s, \mathbf{t})$  は **1次元戸田階層**のある  $\tau$  関数  $\tau(s, \mathbf{t})$  と

$$Z(s, \mathbf{t}) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k q^k}{1 - q^k} \right) q^{-s(s+1)(2s+1)/6} \tau(s, \iota(\mathbf{t})),$$

というように関係する。ここで

$$\iota(\mathbf{t}) = (-t_1, t_2, -t_3, \dots, (-1)^k t_k, \dots)$$

証明には分配関数のフェルミオン表示を用いる。  $\tau(s, \mathbf{t})$  の具体的な形もあとでフェルミオン表示の形で説明する。

## 4. フェルミオン表示と可積分構造

### フェルミオンの演算子とフォック空間

以下のものを用意する：

- 2次元複素自由フェルミ場  $\psi(z), \psi^*(z)$  のフーリエモードとして得られる生成消滅演算子  $\psi_n, \psi_n^*$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) の代数

$$\psi_m \psi_n^* + \psi_n^* \psi_m = \delta_{m+n,0},$$

$$\psi_m \psi_n + \psi_n \psi_m = \psi_m^* \psi_n^* + \psi_n^* \psi_m^* = 0$$

- フォック空間のチャージ  $s$  の部分空間における基底状態

$$\langle s | = \langle -\infty | \cdots \psi_{s-1}^* \psi_s^*, \quad |s\rangle = \psi_{-s} \psi_{-s+1} \cdots | -\infty \rangle$$

と励起状態 (分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  でラベル付けされる)

$$\langle \lambda, s | = \langle -\infty | \cdots \psi_{\lambda_2+s-1}^* \psi_{\lambda_1+s}^*, \quad | \lambda, s \rangle = \psi_{-\lambda_1-s} \psi_{-\lambda_2-s+1} \cdots | -\infty \rangle$$



## 分配関数の構成要素のフェルミオン表示

- フォック空間上の作用素

$$L_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n : \psi_{-n} \psi_n^* :, \quad H_k = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{kn} : \psi_{-n} \psi_n^* :$$

は  $|\lambda, s\rangle$  を固有ベクトルにもち，それらに関する対角成分は

$$\langle \lambda, s | L_0 | \lambda, s \rangle = |\lambda| + s(s+1)/2, \quad \langle \lambda, s | H_k | \lambda, s \rangle = \Phi_k(\lambda, s)$$

となる．これらを用いれば，分配関数の外部ポテンシャルの部分は

$$Q^{|\lambda|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\lambda, s, t)} = \langle \lambda, s | Q^{L_0} e^{H(t)} | \lambda, s \rangle,$$

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k$$

と表せる．

- 頂点作用素

$$\Gamma_{\pm}(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} J_{\pm k}\right), \quad J_k = \sum_{n \in \mathbf{Z}} :\psi_{-n} \psi_{n+k}^*:$$

を  $z = q^{n-1/2}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) に特殊化して乗じたもの

$$\Gamma_{\pm}(q^{-\rho}) = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma_{\pm}(q^{n-1/2})$$

を用いれば, ボルツマン重みの構成要素である  $s_{\lambda}(q^{-\rho})$  は

$$s_{\lambda}(q^{-\rho}) = \langle s | \Gamma_{+}(q^{-\rho}) | \lambda, s \rangle = \langle \lambda, s | \Gamma_{-}(q^{-\rho}) | s \rangle$$

と表せる.

## 分配関数のフェルミオン表示

以上のことから、分配関数のフェルミオン表示が得られる：

$$Z(s, t) = \langle s | \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} e^{H(t)} \Gamma_-(q^{-\rho}) | s \rangle$$

これは戸田階層の  $\tau$  関数のフェルミオン表示に似ているが、構造はまったく異なる。  $\tau$  関数では  $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho})$  のところに時間変数に依存する作用素が現れるのに対して、上の分配関数の表示では中央の部分  $Q^{L_0} e^{H(t)}$  が時間変数  $t$  に依存する。  $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho}), H_k, J_k$  と

$$W_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n^2 : \psi_{-n} \psi_n^* :$$

が満たす一連の代数的関係式（**シフト対称性**）を用いれば、これを  $\tau$  関数に書き直せる。

## τ 関数との関係 (K.T. & Nakatsu, 前掲論文)

$Z(s, \mathbf{t})$  は

$$g = q^{W_0/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) q^{W_0/2}$$

という作用素から得られる **1次元戸田階層** の  $\tau$  関数

$$\tau(s, \mathbf{t}) = \langle s | \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k \right) g | s \rangle = \langle s | g \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} t_k J_{-k} \right) | s \rangle$$

と次のような関係にある：

$$Z(s, \mathbf{t}) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k q^k}{1 - q^k} \right) q^{-s(s+1)(2s+1)/6} \tau(s, \iota(\mathbf{t})),$$

$$\iota(\mathbf{t}) = (-t_1, t_2, -t_3, \dots, (-1)^k t_k, \dots)$$

## シフト対称性

フェルミオンによる量子トーラス代数の実現

$$V_m^{(k)} = q^{-km/2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{kn} : \psi_{m-n} \psi_n^* :$$

に対して次のような代数的関係式が成立する：

$$\begin{aligned} & \Gamma_+(q^{-\rho}) \left( V_m^{(k)} - \frac{q^k \delta_{m,0}}{1 - q^k} \right) \Gamma_+(q^{-\rho})^{-1} \\ &= (-1)^k \Gamma_-(q^{-\rho})^{-1} \left( V_{m+k}^{(k)} - \frac{q^k \delta_{m+k,0}}{1 - q^k} \right) \Gamma_-(q^{-\rho}) \quad (k \geq 0, m \in \mathbf{Z}), \\ & q^{W_0/2} V_m^{(k)} q^{-W_0/2} = V_m^{(k-m)} \quad (k, m \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

これから  $H_k = V_0^{(k)}$  と  $J_k = V_k^{(0)}$  を結ぶ関係式が得られる。

## 5. 溶解結晶模型の変種

### もう一つの溶解結晶模型

位相的弦理論では，ランダム分割模型としてのボルツマン重みを

$$s_\lambda(q^{-\rho})^2 \rightarrow s_\lambda(q^{-\rho})s_{t\lambda}(q^{-\rho})$$

( $t\lambda$  は  $\lambda$  の共役，すなわちヤング図形の転置を表す) というように置き換えた模型も登場する． $Q^{|\lambda|}$  を入れて変形した分配函数  $Z'$  はもう1つのコーシー等式

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(x_1, x_2, \dots) s_{t\lambda}(y_1, y_2, \dots) = \prod_{i, j=1}^{\infty} (1 + x_i y_j)$$

を用いて計算できる：

$$Z' = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho}) s_{t\lambda}(q^{-\rho}) Q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + Qq^n)^n$$

## 2 系列の外部ポテンシャルの導入

上の模型では  $\Phi_k(\lambda)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  と  $\Phi_{-k}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  の 2 系列の外部ポテンシャルを入れて変形した模型

$$Z'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho}) s_{\mathbf{t}\lambda}(q^{-\rho}) Q^{|\lambda| + s(s+1)/2} e^{\Phi(\lambda, s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})},$$

$$\Phi(\lambda, s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \Phi_k(\lambda, s) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k \Phi_{-k}(\lambda, s)$$

に対して可積分構造を論じることができる。すなわち、この分配関数は **2次元戸田階層** — 実際にはその簡約としての **Ablowitz-Ladik (相対論的戸田) 階層** — の  $\tau$  関数と関係していることがわかる。

- K.T., arXiv:1208.4497 [math-ph]
- K.T., J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013), 245202 (23 pages), arXiv:1302.6129 [math-ph]

## 分配関数のフェルミオン表示

$$Z'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \langle s | \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} e^{H(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})} \Gamma'_-(q^{-\rho}) | s \rangle$$

ここで

$$H(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k H_{-k},$$

$$\Gamma'_{\pm}(q^{-\rho}) = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma'_{\pm}(q^{n-1/2}),$$

$$\Gamma'_{\pm}(z) = \exp \left( - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k} J_{\pm k} \right) = \Gamma_{\pm}(-z)^{-1}$$



## τ 関数との関係

$Z'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$  は

$$g' = q^{W_0/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^{L_0} \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) q^{-W_0/2}$$

という作用素から得られる **2次元戸田階層** の τ 関数

$$\tau'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \langle s | \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k \right) g' \exp \left( - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k J_{-k} \right) | s \rangle,$$

と次のような関係にある：

$$Z'(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k t_k - \bar{t}_k}{1 - q^k} \right) \tau'(s, \iota(\mathbf{t}), -\bar{\mathbf{t}})$$

## Ablowitz-Ladik 階層との関係

上の  $\tau$  関数が定める 2次元戸田階層のラックス作用素

$$L = e^{\partial_s} + u_1 + u_2 e^{-\partial_s} + \dots,$$

$$\bar{L}^{-1} = \bar{u}_0 e^{-\partial_s} + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 e^{\partial_s} + \dots$$

は次のように因子分解された形をもつ：

$$L = BC^{-1}, \quad \bar{L}^{-1} = -CB^{-1},$$

$$B = e^{\partial_s} - b, \quad C = 1 + ce^{-\partial_s}$$

この因子分解 ( $\bar{L} = -L$  とはならない) は Ablowitz-Ladik 階層を 2次元戸田階層の簡約系として特徴付ける (A. Brini, G. Carlet and P. Rossi, *Physica* **D241** (2012), 2156–2162, arXiv:1002.0582 [math-ph]).

## 無限行列表示

$L, \bar{L}^{-1}$  の因子分解を証明するためにフェルミオン2次形式と  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  行列の対応

$$\hat{X} = \sum_{i,j \in \mathbf{Z}} x_{ij} : \psi_{-i} \psi_j^* : \longleftrightarrow X = \sum_{i,j \in \mathbf{Z}} x_{ij} E_{ij}$$

を用いる.

- この対応によって  $L_0, W_0, H_k, J_k$  や頂点作用素は

$$L_0 = \Delta, \quad W_0 = \Delta^2, \quad H_k = q^{k\Delta}, \quad J_k = \Lambda^k,$$

$$\Gamma_{\pm}(z) = (1 - z\Lambda^{\pm 1})^{-1}, \quad \Gamma'_{\pm}(z) = 1 + z\Lambda^{\pm 1}$$

というように行列表現される. ここで

$$\Delta = \sum_{i \in \mathbf{Z}} i E_{ii}, \quad \Lambda = \sum_{i \in \mathbf{Z}} E_{i,i+1}$$

- $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho})$  と  $\Gamma'_{\pm}(q^{-\rho})$  は

$$\Gamma_{\pm}(q^{-\rho}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-1/2} \Lambda^{\pm 1})^{-1},$$

$$\Gamma'_{\pm}(q^{-\rho}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2} \Lambda^{\pm 1})$$

というように行列表示される。これらは行列値量子ダイログ函数とみなすことができる。ちなみに、 $\tau$ 函数のフェルミオン表示では  $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho}), \Gamma'_{\pm}(q^{-\rho})$  が積  $\Gamma_- \Gamma_+, \Gamma'_- \Gamma'_+$  の形で現れているが、これは Jacobi の 3 重積公式

$$\vartheta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2} z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2} z^{-1}),$$

を通じて楕円テータ函数との関係を暗示している。

## ラックス作用素の因子分解形の証明の方針

$\tau$  関数を定める作用素  $g'$  の無限行列表示は

$$U = q^{\Delta^2/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q^\Delta \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) q^{-\Delta^2/2}$$

となる. 一般に,  $g'$  に対応する行列  $U$  に対して

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \Lambda^k\right) U \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k \Lambda^{-k}\right) = W^{-1} \bar{W}$$

という等式を満たす下三角行列  $W$  (対角成分 1) と上三角行列  $\bar{W}$  を求めること (分解問題) ができれば,  $L, \bar{L}^{-1}$  は

$$L = W \Lambda W^{-1}, \quad \bar{L}^{-1} = \bar{W} \Lambda^{-1} \bar{W}^{-1}$$

によって決まる. 今の場合の  $U$  は特殊なので, 初期時刻  $t = \bar{t} = 0$  においてこの分解問題が具体的に解ける. それから  $L, \bar{L}^{-1}$  が初期時刻で前述の因子分解形をもつこと (証明にはそれで十分) がわかる.

## 6. まとめ

- 溶解結晶模型は 3次元ヤング図形の統計力学的模型であるが、対角断面の方法によって一種のランダム分割模型に書き直せる.
- 1系列の外部ポテンシャルによって変形した分配函数は 1次元戸田階層の  $\tau$  函数に簡単な函数をかけたものになる. このことを示すために分配函数をフェルミオン表示し, 量子トーラス代数のフェルミオン実現における特別な代数的関係式を利用する.
- ボルツマン重みを少し変更することによって溶解結晶模型の変種が得られる. 分配函数を 2系列の外部ポテンシャルによって変形したものは 2次元戸田階層の  $\tau$  函数になる. さらに, ラックス形式における考察から Ablowitz-Ladik (相対論的戸田) 階層との関係がわかる.
- ランダム行列との比較の観点では, これら 2つの溶解結晶模型はエルミート行列模型とユニタリ行列模型に対応する.