ノイズのある Burgers 方程式とくりこみ群の方法

京都大学総合人間学部基礎科学科

高崎　金久　(Kanehisa TAKASAKI)

ノイズをもつ Burgers 方程式の研究を中心に，くりこみ群の方法の新たな可能性を探る．

1　はじめに

場の理論，統計力学，流体力学などに現れる物理系は無限個の（またはそれに近い）自由度からなる．数学的には無限次元の代数学・解析学・幾何学が関わってくる．そのような対象を扱うにはさまざまな方法や視点があり得る．

くりこみ群とは，一言でいえば,「スケール」を変えるときの系の応答を記述するものである．一般に物理系はいくつかのパラメータをもち，パラメータが変わるにつれて系の状態や振舞いが変化する．スケールを定めるパラメータはやや特殊で，普通は基本法則には明示的に入っておらず，むしろ解析の都合のために人為的に入れるものであることが多い．例えば，時空座標をパラメータ s で $(t,x) \to (e^{zs}t, e^{s}x)$ というように引き延ばす，という具合である．

これは非常に技巧的なことに思えるが，実はこれが臨界現象などを考える強力な視点となる．臨界現象は多数の自由度が協力し合って引き起こす「協同現象」であり，そのために解析には困難が伴う．ところが臨界現象に際しては「スケーリング則」という著しい性質が観察される．このスケーリング則はごく小数のパラメータ（「臨界指数」）のみで記述され，そこには模型の詳細は反映されない（「普遍性」）．そこでスケーリング則に注目すればさまざまな臨界現象を統一的に理解できるのである．そしてスケーリング則を理論的に裏付ける機構がくりこみ群に他ならない．

くりこみ群の方法の前提となるのは系の自由度が短距離から長距離にわたるさまざまなスケールに分布している — いわば「自由度がスケールによって組織化されている」 — という事実である．通常の物理系では例えば Fourier 展開によって自由度をそのように並べることができる.（そもそも，普通はそれ以外の組織化の仕方が用意されていない）．そうしておいて，いわば「皮を一枚一枚めくる」ように，スケールごとに自由度の寄与を取り込んで行くと，スケーリング則が導かれる．このスケールの皮をめくってゆく操作がスケール変換（くりこみ群）で実現されるのである．従って，なんらかのスケール変換の構造の内在する問題には同様のアプローチが可能であろうと期待してよい．

可積分系や可解模型の理論も無限自由度を扱うものであるが，その考え方はまったく異なる．無限自由度の可積分系において基本的なのはある種の代数的な構造（無限次元 Lie 代数など）である．それが系の各自由度を一定の関係（対称性）で結んでいる．つまり「自由度が代数的な構造によって組織化されている」．そのために，例えば粒子の散乱は生成消滅を起こさない弾性散乱のみになったり，場合によっては空間を伝播する粒子そのものが理論の中にほとんど存在しないということが起こる．

可積分系や可解模型が流行する以前の場の理論や統計力学においても代数的方法と呼ばれるものはあったが，それは観測可能量や状態汎函数などを作用素環論的に考察するものだった．その考え方は共形場理論などにも生かされているが，代数的構造が理論をほとんど決めてしまうというような極端な事態はほとんど想定されていなかった．昔ながらのイメージでは，量子化された場の理論は粒子が飛びかい生成消滅する世界で，真空さえもそのために常にざわざわと「沸き立っている」．その意味では，可積分系や可解模型の整然とした世界はあまり場の理論らしくない．

このように見比べると，くりこみ群的な視点と可積分性・可解性の視点とは一見何の関係もないように見えるが，実は深いところでつながっている．くりこみ群の方法の特徴は模型を一つに固定しないで連続パラメータ族（無限次元の族も含めて）の中で考えることにある．くりこみ群はそのような模型のパラメータ空間に作用するものだからである．そのようなパラメータ空間の中で特に重要なのはくりこみ群の「固定点」で，その周囲の様子を調べることによって臨界現象が説明できる．ところで，２次元の場の理論にこの描像を適用すると，固定点は共形場理論に他ならない．このように，くりこみ群の視点から見れば，固定点はなんらかの意味で可解模型である可能性が高いのである．

以上のようなことを念頭に置きつつ，ここでは「ノイズのある Burgers 方程式」という少し毛色の変わった話題を紹介する．ここで扱うのはよく知られた Burgers 方程式に Gauss 型ノイズの項が加わった一種の Langevin 方程式である．同様の方程式は Navier-Stokes 方程式や磁性体の Heisenberg 方程式などに対しても考えられているが，Burgers 方程式の場合は，通常の流体力学的解釈以外に，成長界面や高分子系を記述するものとしての解釈もあり，８０年代に入って新たな関心を呼んでいる．

問題はこの系の長時間・長距離挙動をくりこみ群の方法により解析することである．実際，このような問題に対してもすでにくりこみ群の方法が「動的くりこみ群」の名のもとで開発されている.「動的」と呼ぶのは，これが非平衡系を扱うものだからである．これに対して平衡系を扱うくりこみ群を「静的くりこみ群」と呼ぶ．

統計物理におけるくりこみ群の方法は７０年代前半に Kadanoff, Wilson, Fisher などの人達により平衡系の臨界現象に対する新しい計算手段として開発された [1]（Wilson はその業績によりノーベル賞を貰っている）．その方法は間もなく磁気緩和過程などの非平衡系の問題に拡張され [2]，すでに７０年代後半には Navier-Stokes 方程式や Burgers 方程式に適用されている．このように，Burgers 方程式のくりこみ群解析はそれほど新しい問題とは言えないが，以下のような理由でこの問題を改めてとりあげてみたいと思った次第である．

１）平衡系のくりこみ群の理論は８０年代に構成的場の理論へ応用され，その過程で数学的に厳密な取り扱いができるようになった．それに比べて非平衡系のくりこみ群の理論

は，物理学者が７０年代に行ったこと（単純な 1-loop 計算）から先にはほとんど進んでおらず，数学的に未完成の問題のように思われる．Burgers 方程式はこの問題を探る試金石となるかもしれない．

２）Burgers 方程式自体は任意の空間次元で考えられるが，空間１次元の場合は特別な事情でスケーリング則の指数などが正確に決定できることが知られている．このことはくりこみ群と可解性の関連を考える新たな材料と言えるだろう．

３）ノイズのある Burgers 方程式は Kuramoto-Sivashinsky 方程式と呼ばれる方程式とも関係することが知られている．Kuramoto-Sivashinsky 方程式は決定論的だが，その解は時空カオス的に振舞うことが知られている．その長時間・長距離挙動が実はノイズを入れた Burgers 方程式でモデル化されるというのである．いまのところこのことは粗削りなくりこみ群計算や数値計算などで確認されているだけのようであり，もう少しきちんと理解したい．

残念ながら筆者自身はこれらの問題についてまだ新たな結果を得ていない．以下では知られている結果・文献などの紹介に徹することにする．

2 統計物理における背景

この節では統計物理におけるくりこみ群の方法の一般的背景をざっと眺めることにする．手近な参考書として中野・木村 [4]，土井・小貫 [5] の本を掲げておく．

2.1 平衡系の問題

平衡系の統計力学は，数学的にはともかく，物理としてはその基礎がすでに確立されている．基本的な問題は要するに分配函数や相関函数を計算することである．例えばエネルギーが離散的な値 E_n をとる場合には，分配函数は

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \tag{1}$$

で与えられる．エネルギー汎函数（Hamiltonian） $H = H[u]$ をもつ連続場 $u = u(x)$ の系の場合には

$$Z = \int \mathcal{D}u e^{-H[u]} \tag{2}$$

という汎函数積分で与えられる．（これは Euclid 化された場の理論の設定でもある．）相関函数も同様の和や積分で与えられる．

もちろん，よく知られているように，これらの和または積分を実際に実行できるのは特殊な場合に限られている．近年（どの辺りからそう呼んでよいのかわからないが）になって新しい手法で計算できる場合が続々と発見され，可解模型と呼ばれているわけであるが，昔は理想気体とか自由場の場合にしか exact な計算ができなかった．そこで考え出されたのが，理想気体とか自由場からのずれを摂動とみなして級数展開する手法（摂動論）であ

る．そこに現れる級数の各項は Mayer グラフ，Feynman グラフなどの図形として表現できる．分配函数や相関函数はこのようなグラフの無限和に展開されるわけである．

当然，これらの級数の収束が問題になるが，場の理論の Feynman グラフ展開は級数の収束を論じる前にまずその各項（一般に有限次元の多重積分として与えられる）の発散に悩まされる．それを処理するための処法として考え出されたのがいわゆる「くりこみ」である．くりこみ群の概念も最初はこの文脈で導入された．注意すべきは，こうして各項が有限値に修正された（くりこまれた）摂動級数でも級数自体の収束は依然として保証されていないことである．事実，多くの場合くりこまれた級数の収束半径は０である．収束半径０だからといって，例えば正の実軸の上で収束しないとは限らないが，Feyman グラフ展開の場合には，Borel 総和法などで収束を加速しない限り，それさえも望めないことが次第に明らかになった．

そこで非摂動論的取り扱いがいろいろと試みられた．その際に鍵となったのは，Mayer 展開は Hamiltonian などの正値性を考慮に入れた展開なので原理的に収束性がよく，例えば展開パラメータが正の実軸にあって十分小さいときには実際に収束する，という事実である.（これに対して Feynman グラフ展開は正値性などを無視した強引な展開なので，収束性が悪くなっている.）２次元のスカラー場の理論はこのことを拡張した技法（クラスター展開と呼ばれる）で構成できる．しかし３次元，４次元と進むにつれ，どうしてもくりこみ群的な考え方が必要になってくる．そこで Wilson 達の新しいくりこみ群の方法を厳密化する試みが始まった．それとクラスター展開を組み合せることによって，８０年代には４次元の場の理論（ならびにやはりくりこみ群的な方法が必要な２次元のある種のフェルミ場の理論）が厳密に扱えるようになったのである [3, Part I].

このようにかなりの成功をおさめているとはいえ，このクラスター展開とくりこみ群を組み合せる場の理論の構成法は実に大変な計算を必要とする．実際の計算の細部を眺めてみると，もう少しエレガントに整理できないのか，と感じるところが沢山ある．例えてみれば，擬微分作用素の理論によってきれいに整理される以前の偏微分方程式論（道具立てや一般論がまだ整備されず，問題ごとに各個撃破を迫られていた）を思わせるところがある．

2.2 非平衡系の問題

平衡系と違って非平衡系の取り扱いには，物理学でもまだ確立された一般論がないようである．ここでは次のような Langevin 方程式で非平衡系をモデル化する立場をとる．

$$\partial_t u = K(u, \nabla u, \ldots) + \eta, \tag{3}$$

ここで $u = u(t,x)$ は系を記述する場（一般に多成分），$\nabla u = (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_d)$ はその１階導函数,「$\ldots$」 は高階導函数，$\eta = \eta(t,x)$ は Gauss 型ノイズである．K の形はもちろん扱う対象によって異なる．このような確率モデルは磁性体，流体，高分子，界面，などいろいろな物理系で考えられている．

例えば，最も単純な Landau-Ginzburg 模型などの場合にはポテンシャル汎函数 $H = H[u]$ が存在して K は

$$K = -\frac{\delta H}{\delta u(t,x)} \tag{4}$$

で与えられ，またノイズとしては時空間相関のないホワイトノイズ

$$< \eta(t,x)\eta(t',x') >= 2D\delta(t-t')\delta(x-x'), \quad < \eta(t,x) >= 0 \tag{5}$$

を考えることが多い．このとき $u(t,\cdot)$ の分布汎函数 $P = P[t,u(\cdot)]$ の時間発展は Fokker-Planck 方程式

$$\partial_t P = \int dx \frac{\delta}{\delta u(x)} \left(D\frac{\delta}{\delta u(x)} + \frac{\delta H}{\delta u(x)} \right) P \tag{6}$$

に従う．その解は $t \to \infty$ において

$$P \ \to \ P_\infty = \mathrm{const.}e^{-H/D} \tag{7}$$

というような平衡分布 P_∞（H を Hamiltonian とする Maxwell-Boltmann 分布に他ならない）に収束する．モード結合項と呼ばれる項の入ったもっと複雑な形の Langevin 方程式についても同様のことが言える．いずれせよこの形の Langevin 方程式の特徴は平衡状態の存在とそこからの揺らぎがうまく取り込まれていることにある．このことから揺動散逸定理という重要な帰結が導かれる．

他方，これから扱う Burgers 方程式の場合は K が

$$K = \nu\nabla^2 u + \frac{\lambda}{2}(\nabla u)^2 \tag{8}$$

で与えられる．これは上のようなポテンシャルをもたないので，平衡分布の存在が一般には保証されない．従って揺動散逸定理も考えようがない．ところが空間１次元の場合だけは特殊な事情で平衡分布が具体的に構成できて，それに伴う揺動散逸定理がある．この平衡分布については後の節で説明する．

さて，平衡系で分配函数や相関函数を考えるように，Langevin 方程式に対して考えなければならないのは相関函数や応答函数という量である．例えばもっとも基本的なのは

$$C(t,x,t',x') =< u(t,x)u(t',x') > \quad (< \ \ > \text{は}\ \eta\ \text{についての期待値}) \tag{9}$$

という２点相関函数である．また，もとの方程式に

$$\eta(t,x) \ \to \ \eta(t,x) + \eta_{ext}(t,x) \tag{10}$$

という外力項をいれ，外力に対する応答の期待値をとったもの

$$G(t,x,t',x') = \left\langle \frac{\delta u(t,x)}{\delta \eta_{ext}(t',x')} \right\rangle \tag{11}$$

が応答函数（あるいは Green 函数）である．もっと複雑な相関函数や応答函数も同様に定義される．

これらの函数を exact に計算することも特別な場合 — K が u とその導函数について線形の場合 — を除いては一般に困難である．従って，平衡系の場合と同様の近似計算や摂動計算の方法が開発されている．また摂動論的なくりこみ群の理論も７０年代の半ばには

現れている．後の節で紹介する Burgers 方程式のくりこみ群解析もこの段階の手法によっている．

Langevin 方程式に対してくりこみ群変換を数学的にきちんと構成するのは平衡系の問題よりかなり面倒で，いままでなされているのは摂動論レベルの，しかも実は「1-loop 計算」と呼ばれる最低次近似での計算に過ぎない．平衡系の場合，くりこみ群変換は結局のところ期待値をとる操作（和あるいは積分）をスケールごとに逐次実行して行くだけのことである.（それさえも，厳密に考えようとすればクラスター展開などを用いて大騒ぎをしなければならない.）ところが，Langevin 方程式に対してくりこみ群変換を実行するには，途中で何回か陰函数（それも実は無限次元の陰函数）を解かねばならない．1-loop 計算ではそれがあらわに見えないが，数学的に操作の内容を明確に記述しようとするとその問題にぶつかる．そういうわけで，all order の摂動論も含め，数学的にきちんとした取り扱いは平衡系の場合ほど進んではいないようである．

ただ，Langevin 方程式とは少し違う文脈ではあるが，同様に確率論的物理系である「ランダム系」の取り扱いは近年相当に進展している [3, Part II]．Langevin 方程式にはノイズが加法的な外力として入っているのに対して，ランダム系では系の力学的構造自体がランダムに変動する（例えばスピン系の結合定数が確率変数になる，粒子の運動を規定するポテンシャルが確率変数になる，など）．実はノイズを入れた Burgers 方程式は簡単な変数変換（昔から知られた Cole-Hopf 変換に他ならない）によってそのようなランダム系に書き直せる．従って現状ではむしろランダム系の理論を援用する方が厳密な結果を出しやすいくらいである．このようなランダム系の厳密な理論を参考にしながら Langevin 方程式のくりこみ群の理論をつくって行くのがよいのかも知れない．

ちなみに，このような Langevin 方程式に対しても「可解模型」の理論ができるのだろうか？そういうことができると確かに面白いと思うが，そのような試みはまだあまり聞いたことがない．空間変数 x を落とした有限次元の Lagevin 方程式については，伊藤栄明氏や高橋陽一郎氏の報告に出てくる系がそういう意味での可解模型の例といえるのではないかと思う.（実際，高橋氏の扱っている系は等質空間上の Brown 運動の例に他ならず，可積分系である Calogero-Moser 系の量子論と関わっているようである.）このような有限自由度系からある種の極限をとれば空間的にも広がった場の Langevin 方程式が得られるかも知れない．

もう一つのアイディアとして，Burgers 方程式に習って非線形可積分系に適当なノイズを加えた系を調べることも考えられる．例えば以下のような例を考えてみたらどうか？

- $K = \nu\nabla^2 u - \lambda|u|^2 u$ （非線形 Schrödinger 方程式）．これは複素 Landau-Ginzburg 方程式 $K = \nu\nabla^2 u - \lambda|u|^2 u - \mu u$ の特別な場合（$\mu \to 0$）とみなせる．

- $K = J\vec{S} \times \nabla^2\vec{S} + \cdots \quad (u = \vec{S})$ （Heisenberg 方程式）．これは磁性体の模型であり，動的くりこみ群の方法が最初に適用された場合でもある．

- $K = \nu\nabla^2 u - \mu\sin(\beta u)$ （散逸型？ sine-Gordon 方程式）．時間微分の項を２階に置き換えれば本来の sine-Gordon 方程式になる．その場合も u をベクトル値にして１階化すれば上の形に書ける．

ただしここには可積分でない場合も含まれている．実際，散逸型 sine-Gordon 方程式は（複素 Landau-Ginzburg 方程式もそうだが）もともと可積分ではないし，その他の例も空間１次元の場合のみ可積分である．しかしどれも物理系のモデルとして実際に使われているものなので，敢えて全部並べてみた．もっとも，このように勝手にノイズを加えることがはたして問題設定として適切なのかどうか，例えば物理系として満たすべき揺動散逸定理などとの整合性はどうか，などの疑問もある．（この点は研究会で伊藤栄明，岡部靖憲の両氏から注意を受けた）．それでも敢えてこのようなものを考えてみるとしよう．はたしてこの中に「可解模型」が見つかるだろうか？

一般的に考えると，そういうことにはあまり根拠がない．そもそも sample のレベルでみればノイズはもとの方程式の可積分性を壊す外力として働くだけだから，ノイズのないときの可積分性がノイズを入れたときに何かの役に立つという保証はない．しかもノイズのある場合の可解性とは応答函数・相関函数などが exact に計算できるということで，ソリトン理論で偏微分方程式を exact に解くこととはもともと別問題である．

しかしながら，他方では高橋氏の例（等質空間上の Brown 運動）のように，決定論的系の可積分性が確率論的設定にもある意味で生き残る例もある．しかも高橋氏の例は可積分系の量子化ということとも関連があり，その意味では上のような可積分系にノイズを入れた系が量子可積分系と関連した意味で可解であってもおかしくはない，という気もする．

3　くりこみ群とはなにか？

この節ではくりこみ群の考え方をできるだけ直観的に説明してみる．中野・木村 [4]，土井・小貫 [5] の本やこの報告集の服部哲弥氏の報告も併せて参照されたい．

3.1　抽象的な設定

きわめて抽象的に考えれば，くりこみ群の舞台設定は次の２つの対象からなる組 $(\mathcal{P}, T)$ である．

- 物理系のパラメータ空間 $\mathcal{P}$ （Hamiltoninan の集合と思ってもよい）
- $\mathcal{P}$ 上の写像 $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ （物理系のスケールを変える変換）

T の生成する半群 $\{T^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ をくりこみ群という．これはスケールを次々に L 倍（L は１より大きい正定数）して行く操作に対応する変換を考えていることになる．

これに対して連続パラメータ s によりスケールを e^s 倍することにあたる連続版のくりこみ群 $\{T^s \mid s \geq 0\}$ もある．もともと場の理論で最初にくりこみ群が導入されたときにはこの連続版の形で，しかも s についての微分方程式（くりこみ群方程式とか Callan-Symanzik 方程式とか呼ばれる）の形で定式化されていた．くりこみ「群」と呼ばれるのもそのためで，微分方程式で書けると形式的には s について逆向きに（つまり $s < 0$ の方向に）流すこともできるので「群」と見なされたのである．

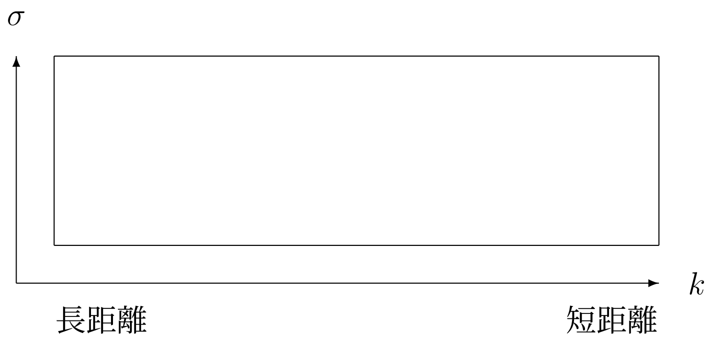

図 1: 自由度をスケールパラメータによってならべる

正確に言えば，実は場の理論で最初に現れた（いまも標準的に用いられている）くりこみ群とその後統計物理に利用されたものとは少し違っている．場の理論のくりこみ群（特に微分方程式の形で与えられるもの）は摂動級数のくりこみ処法による発散処理に際して不定性（任意性）が残ることに由来しており，その任意性をあらわすパラメータ（一種のスケールパラメータ）についての微分方程式がくりこみ群方程式なのである．従ってこのスケールパラメータは大きくも小さくもできる．すでに前節でも触れたように，この議論は本質的に摂動論に頼っている．これに対して統計物理の文脈で Kadanoff, Wilson, Fisher 達が考えた定式化は，以下に述べるように，短距離スケールの自由度を消去して行くので逆戻りできないのである．その代わり，厳密な取り扱いも可能で構成的場の理論にも応用できる．このように，両者は概念的にやや異なるものであるが，少なくとも近似的には実質的に同じ結論を導くので，あまりうるさく区別しないことにする．

3.2 くりこみ群の構成の手順

まず前提として $\mathcal{P}$ に属する物理系 H の自由度はあるスケールパラメータ k によって共通の範囲 $0 \leq k \leq \Lambda$ に分布しているとする（図１）．自由度を指定するその他のパラメータをひっくるめて象徴的に σ と書くことにすると，各自由度は $u_{k\sigma}$ というように添字付けできる．$\mathcal{P}$ が Hamiltonian の集合であると考えれば，各 Hamiltonian はこれらの変数の（汎）函数 $H = H[u_{k\sigma}]$ となる．場の理論や統計力学の設定では k は空間変数について Fourier 変換したときの運動量の絶対値と思えばよい．Λ はいわゆる「紫外切断」である．実空間のスケールで見ると，k の小さい方が長距離，大きい方が短距離に対応する．慣例に従って $k = 0$ を赤外端（IR end），$k = \Lambda$ を紫外端（UV end）と呼ぶ．

くりこみ群変換 $H \to H' = T(H)$ は次の２つの段階を経て構成される．

- 短距離の側の自由度を「消去」してその効果を長距離側にくりこむ（図２）．
- 残った自由度を一斉に「rescale」してもとと同じスケールに戻す（図３）．

以下，もう少し立ち入って説明する．

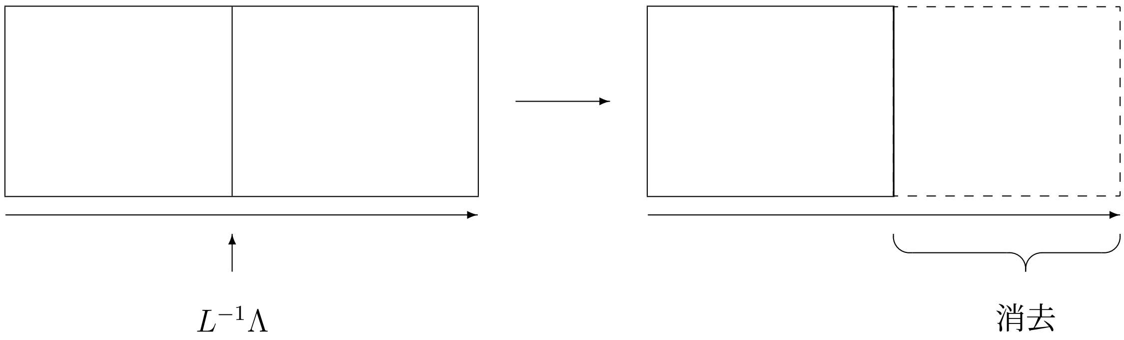

図 2: 短距離側の自由度の消去

第１段階：　系の自由度を $k = L^{-1}\Lambda$ を境に分けて，短距離側（$L^{-1}\Lambda \le k \le \Lambda$）の自由度を消去して，長距離側（$0 \le k \le L^{-1}\Lambda$）の自由度のみを含む物理系 $\tilde{H} = \tilde{H}[u_{k\sigma}, 0 \le k \le L^{-1}\Lambda]$ をつくる．この $\tilde{H}$ は短距離の自由度からの寄与を「平均化」された形で取り込んでいて，長距離の現象についてはもとの H と同じ内容をもつ．

この「平均化による消去」が意味することは問題によって異なる．例えば連続場の平衡統計力学では場の Fourier mode を $k < L^{-1}\Lambda$ と $k > L^{-1}\Lambda$ の二つの部分に分けて

$$u = u_< \ + \ u_> \tag{12}$$

と書き，$u_>$ について先に平均をとること

$$\exp(-\tilde{H}[u_<]) = \int \mathcal{D}u_> \exp(-H[u_< \ + \ u_>]) \tag{13}$$

によって $\tilde{H}$ を定義する.（これは有効 Hamiltonian や有効作用と呼ばれるものに他ならない.）格子上の場やスピン系などでは直接に格子上でブロックスピン変換という短距離の平均操作を行って $\tilde{H}$ を定義する．フラクタル上の拡散過程ではランダムウォークの decimation がそれにあたる．どのような問題を考えているにせよ，この自由度の部分的消去が技術的に最も困難を伴う部分である．

第２段階：　$\tilde{H}$ では自由度が $0 \le k \le L^{-1}\Lambda$ の範囲に分布しているので，そのままでは $\mathcal{P}$ に属する物理系とはみなせない．そこで系全体のスケールを

$$k' = Lk, \quad u'_{k'\sigma} = L^{-\chi_\sigma} u_{k\sigma} \tag{14}$$

というように一斉に引き延ばして，そのようにして得られる物理系を $H' = H'[u'_{k\sigma}]$ と呼ぶ.（要するに単なる変数変換である.）ここで $u_{k\sigma}$ は元の系の自由度達，$u'_{k\sigma}$ は rescale された自由度である．また χ_σ は各自由度の rescaling の仕方を決める指数であり，スケーリング則の指数と直接の関係がある．

こうして $H \to \tilde{H} \to H'$ という２段階の手順を経てくりこみ群変換 $H' = T(H)$ が構成される．$\mathcal{P}$ はこの変換が $\mathcal{P}$ 内にとどまるように選ばねばならない．例えば服部氏の扱っているフラクタル上のランダムウォークの場合は非常に巧妙な状況設定のために $\mathcal{P}$ を有限次

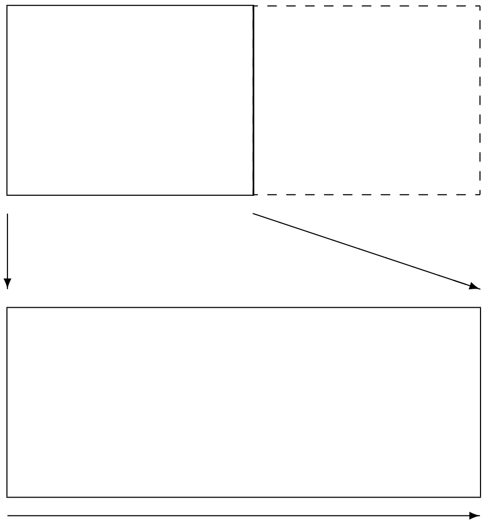

図 3: rescaling により全体のスケールをもとに戻す

元集合に選べたが，普通の場の理論や統計物理では $\mathcal{P}$ はどうしても無限次元になってしまう．しかし実際の応用（特に昔ながらの場の理論）では近似として $\mathcal{P}$ を有限次元集合で代用することが多い．例えば Landau-Ginzburg 模型は

$$H = \int dx \left(\frac{\nu}{2}(\nabla u)^2 + \frac{\mu}{2}u^2 + \frac{\lambda}{4}u^4 \right) \tag{15}$$

という Hamiltonian をもつが，くりこみ群変換は近似的には 3 つのパラメータ (ν, μ, λ)（Wilson の言葉で言えば「relevant」な結合定数）の空間に働く変換として書ける．実はこれが普通の場の理論で「くりこみ可能」といっていることに他ならない．

3.3 ここから何がわかるのか？

くりこみ群の記述を臨界現象の理解と結びつけるにはさらに次のような作業が必要である．

- T の固定点を決めること
- 固定点のまわりでのくりこみ群の軌道の様子を知ること

くりこみ群の固定点，すなわち

$$T(H_*) = H_* \tag{16}$$

という $\mathcal{P}$ の点 H_* はスケール不変性（系を眺める尺度を変えても同じように見える）をもつ．2 次元の場の理論ではこのようなスケール不変性が同時に共形不変性を意味し，H_* は共形場の理論となる．また平衡系統計力学では臨界点直上の理論と解釈される．このよ

うに，くりこみ群の固定点はなんらかの意味で可解模型（自由場など自明になる場合も含めての話だが）を与えるであろうと期待されるのである．

次にそのような固定点近傍のくりこみ群の軌道の様子から，序文で触れたようなスケーリング則を導くことができる．スケーリング則とは，要するに，物理系を記述する基本的な函数（分配函数，相関函数，自由エネルギー，など）が一種の近似的自己相似性をもつことである．例えば後に扱う Burgers 方程式の長時間・長距離挙動の問題などでは，応答函数や相関函数が

$$F(t,x) \sim x^{\chi} f(t/x^{z}) \tag{17}$$

という振舞いをすることをいう．普通の場の理論でくりこみ群方程式とか Callan-Symanzik 方程式とか言っているのはこのような近似的自己相似性の微分表現に他ならない．平衡統計力学の臨界現象では同様の関係式が温度や相互作用定数を変数として成り立つ．そのとき定数 χ, z を臨界指数と呼ぶ．そもそもこのようなスケーリング則を理論的に導出する試みとして７０年代前半に Kadanoff, Wilson, Fisher の仕事が現れたのである．

4　Burgers 方程式の研究の経過と背景

この節では文献紹介を兼ねてノイズのある Burgers 方程式の研究の経緯と背景を簡単にまとめておく．

Burgers 方程式はもともと流体力学で導入されたもので [6]，流体の速度場 $v = v(t,x)$, $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, に対して次のように書ける．

$$\partial_t v + \lambda v \nabla v = \nu \nabla^2 v - \nabla \eta, \quad \mathrm{rot}\ v = 0. \tag{18}$$

ここで η は既に述べたようなノイズである．（ここではノイズは保存力として働いている．）方程式左辺第２項（いわゆる移流項）の係数は普通は１であるが，ここでは一般に λ と書いている．（次元解析やくりこみ群解析の視点から見るとこのように一般的にしておくのが都合がよい．）この方程式は見かけが Navier-Stokes 方程式とよく似ているが，Navier-Stokes 方程式の場合は速度場に $\mathrm{div}\ v =$ という条件を課すことに注意されたい．

流体力学では Burgers 方程式がモデル方程式の一つとして頻繁に研究されている．その際だった特徴は「衝撃波」を生じることにある．また長時間・長距離挙動も興味ある特徴を示す．こういうことはすでに Burgers 自身によって指摘されている．ランダムネスの導入についても，Burgers 自身はノイズ項を加えるかわりに初期値をランダムに与えて時間発展を追跡する立場の解析をしている．

ノイズの役割をくりこみ群の方法で調べたのが Forster, Nelson, Stephan の論文 [7] である．ただし Forster 達の議論の中心はむしろ Navier-Stokes 方程式にあり，Burgers 方程式については簡単に触れるにとどめている．Burgers 方程式について改めて詳しい解析を行ったのが Kardar, Parisi, Zhang の論文 [8] である．Kardar 達は前にも触れた次の形の方程式（これを pre-Burgers 方程式ということがある）を扱った．

$$\partial_t u = \nu \nabla^2 u + \frac{\lambda}{2} (\nabla u)^2 + \eta. \tag{19}$$

ここで η は次のような統計的性質で特徴づけられる Gauss 型ノイズである．

$$< \eta(t,x)\eta(t',x') >= 2D\delta(t-t')\delta(x-x'), \quad < \eta(t,x) >= 0. \tag{20}$$

この u と上の v とは次の関係で結ばれている．

$$v = -\nabla u. \tag{21}$$

その後の Medina, Hwa, Kardar, Zhang の論文 [9] はさらにノイズが時空間相関をもつ場合を扱っている．ただし，これらのくりこみ群解析は Ma, Mazenko の論文 [10]（Heisenberg 方程式を扱っている）が示した 1-loop 計算の方法をほとんどそのまま踏襲している．

空間１次元の場合にスケーリング則の指数の値を正確に決定したのが Huse 達の論文 [11] である．Huse 達は空間１次元の場合の特殊事情として平衡分布が

$$P_{st} = \mathrm{const.} \exp\left(-\frac{\nu}{2D}\int_{-\infty}^{\infty} dx(\partial_x u)^2\right) \tag{22}$$

という形（Gauss 型！）で与えられることを示し，スケーリング則の指数の間に成り立つ関係式などと組み合せて指数の値を求めた．空間１次元の場合の特殊性は Forster 達の論文 [7] でも指摘されていたが，Huse 達の結果はそれをきちんと裏付けた（しかも別の方法で）ということになる．なお，Kardar 達の論文 [8] は同じスケーリング則の指数をくりこみ群の 1-loop 計算で求めているが，その値は近似計算であるにもかかわらず Huse 達と正確に一致している．

ちなみに，この P_{st} が平衡分布を与えることは次のようにしてわかる．空間１次元の場合，$u(t,\cdot)$ の分布汎函数 $P = P[t,u(\cdot)]$ の時間発展は Fokker-Planck 方程式

$$\partial_t P = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta}{\delta u(x)}\left(D\frac{\delta}{\delta u(x)} - \nu\partial_x^2 u - \frac{\lambda}{2}(\partial_x u)^2\right)P \tag{23}$$

に従う．ここで仮に右辺の積分の中の $(\partial_x u)^2$ の項がないとすれば，上の P_{st} は確かにこの方程式を満たす．ところが，実は $P = P_{st}$ に対してこの項の寄与は消えてしまう：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta}{\delta u(x)}((\partial_x u)^2 P_{st}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Big(2\partial_x^2 u - \frac{\nu}{D}(\partial_x u)^2 \partial_{xx} u\Big)P_{st} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \Big(2\partial_x u - \frac{\nu}{3D}(\partial_x u)^3\Big)P_{st} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

こうして P_{st} が平衡分布を与えることがわかる．この論法が空間２次元以上では通用しないことに注意されたい．

なお，空間１次元の場合に現れるもう一つの特殊事情が最近になって L'vov 達 [12] により指摘されている．それによると，空間１次元のときこの系の摂動展開では紫外発散が相殺し，そのことが Kardar 達 [8] の摂動論的くりこみ群解析の信頼性を保証しているのだそうである．

８０年代に入ってから Burgers 方程式はランダム系の界面を記述するものとして新たな関心を呼んだ．Forgacs 達のレヴュー [13] にはこの周辺の話題が豊富に紹介してある．

Kardar 達が改めて Burgers 方程式を取り上げたのもそのような背景による．ランダム系との関連を見るには Huse 達に習って

$$W = \exp\left(\frac{\lambda}{2\nu}u\right) \tag{25}$$

という変数変換を行う．すると W に対する方程式は

$$\partial_t W = \nu\nabla^2 W + \frac{\lambda}{2\nu}\eta W \tag{26}$$

になる．これはランダムポテンシャル $(\lambda/2\nu)\eta$ をもつ拡散方程式と解釈できる.（ノイズがなければこれは通常の Cole-Hopf 変換に他ならない.）ここでさらに $t = x_0$ というように t を空間変数とみなすと，これは $d+1$ 次元のランダム系の中の界面（あるいはある種の高分子系）を記述する模型に他ならないのである．従ってランダム系について知られている結果を Burgers 方程式に翻訳することができる，というわけである．実際，Kardar 達の論文 [8] ではくりこみ群の 1-loop 計算の弱点（臨界次元である $d = 2$ の様子がよくわからない）をそのような議論で補っている．

ランダム系との関連と並んで，もう一つの新たな側面が８０年代の初めに Yakhot [14] によって指摘されている．Yakhot は Kuramoto-Sivashinsky 方程式（κ, λ, ν' は正定数）

$$\partial_t u = -\nu'\partial_x^2 u + \frac{\lambda}{2}(\partial_x u)^2 - \kappa\partial_x^4 u \tag{27}$$

の解（カオス的に振舞う）の長時間・長距離での統計的性質がノイズをいれた Burgers 方程式と一致することを（いろいろな仮説のもとで）主張した.（正確に言えば，Yakhot は Burgers と同様，ノイズを入れる代わりにランダムな初期値を与えた Burgers 方程式を使っている.）Yakhot の仮説や主張は Zaleski [15] により数値解析的に検証されている．さらに Zaleski は上の方程式の右辺の４階項を６階項に置き換えても長時間・長距離の振舞いがやはりノイズのある Burgers 方程式（ただしパラメータの値は違う）でモデル化されること，つまりここでもスケーリング則の「普遍性」が成立していることを示している．

5　くりこみ群解析の概要と結果

この節では Forster 達 [7] と Kardar 達 [8] の論文に沿ってノイズのある Burgers 方程式のくりこみ群解析（1-loop 計算）の概要と結果を紹介する．

5.1　摂動展開の方法

まず，この問題に対する摂動展開の方法を簡単にまとめておく．

実際の摂動計算は Langevin 方程式を Fourier 変換した形で進める．$u(t,x), \eta(t,x)$ の Fourier 変換を

$$u(t,x) \;\; = \;\; \int \frac{dtdx}{(2\pi i)^{d+1}} e^{i(kx-\omega t)} u(\omega, k), \tag{28}$$

$$\eta(t,x) \quad = \quad \int \frac{dtdx}{(2\pi i)^{d+1}} e^{i(kx-\omega t)} \eta(\omega,k) \tag{29}$$

と書くことにする.(ここでは函数とその Fourier 変換を同じ文字であらわし，変数の違いで区別する，というルーズな記法に従っている）．Fourier 変換された Langevin 方程式は

$$\begin{aligned} -i\omega u(\omega,k) \quad &= \quad -\nu k^2 u(\omega,k) - \frac{\lambda}{2}\int \frac{d\omega' dk}{(2\pi i)^{d+1}} k'(k-k') \\ &\quad \times u(\omega',k')u(\omega-\omega',k-k) + \eta(\omega,k) \end{aligned} \tag{30}$$

となる（実はこれによって境界条件などを密輸したことになる）．応答函数を定義するにはさらに外力 $\eta_{ext}(t,x)$ の Fourier 変換 $\eta_{ext}(\omega,k)$ も付け加えておかなければならない．この式は $u(\omega,k)$ についての線形項を左辺に集めてその係数で割れば

$$u(\omega,k) = G_0(\omega,k)\eta(\omega,k) - \frac{\lambda}{2} G_0(\omega,k)\int \cdots \tag{31}$$

と書き直せる．ここに $G_0(\omega,k)$ は $\eta = 0$ のときの応答函数，すなわち

$$G_0(\omega,k) = \frac{1}{\nu k^2 - i\omega} \tag{32}$$

である.(普通の場の理論でいえば free propagator にあたる.)

この式を逐次代入法で形式的に解けば，λ を摂動パラメータとして $u(\omega,k)$ に対する一種の摂動展開

$$\begin{aligned} u(\omega,k) \quad &= \quad G_0(\omega,k)\eta(\omega,k) - \frac{\lambda}{2} G_0(\omega,k)\int \frac{d\omega' dk'}{(2\pi i)^{d+1}} k'(k-k') \\ &\quad \times (G_0\eta)(\omega',k')(G_0\eta)(\omega-\omega',k-k') + O(\lambda^2) \end{aligned} \tag{33}$$

を得る．図形的には，$\lambda k'(k-k')/2$ を頂点，G_0 を辺，η を端点にそれぞれ対応させることにより，展開の各項を二分木グラフとして表現できる（図４）．外力項のあるときには $\eta \to \eta + \eta_{ext}$ と置き換えればよく，端点としてはノイズと外力の二種類が現れる．

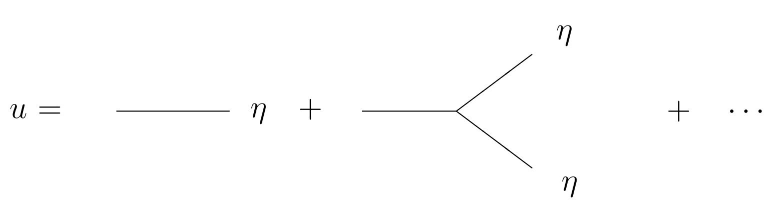

図 4: $u(\omega,k)$ の摂動展開をグラフで表示する

相関函数を求めるにはこれら級数の η についての期待値をとらなければならない．η については Gauss 分布に従うと仮定しているので，その積の期待値は２個ずつの期待値の積をいろいろな仕方でとっての足し上げたもの（場の理論でいえば Wick 縮約）として書ける．２個の積の期待値は仮定により

$$< \eta(\omega, k)\eta(\omega', k') >= 2D(2\pi i)^{d+1}\delta(\omega + \omega')\delta(k + k') \tag{34}$$

である．図形的にはこの操作は上に述べた二分木の端点を２個ずつ結び，そこにこの共分散函数を挿入することによって表現される（図５）．応答函数 $G(t, x, t', x') = G(t - t', x - x')$ の Fourier 変換 $G(\omega, k)$ を求めるときには $\eta \to \eta + \eta_{ext}$ という置き換えをして展開し，η_{ext} の端点は縮約をしないで残す．そして η_{ext} の１次の部分（つまり１本だけこの端点をもつ図形）のみを拾い出す．

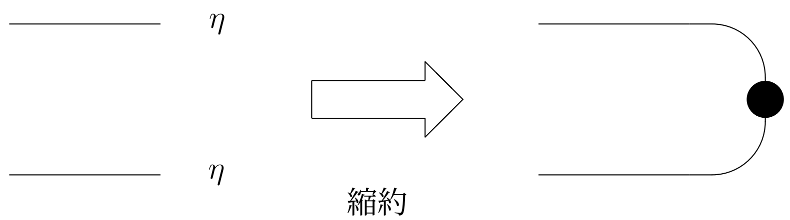

図 5: 期待値をとることにより端点が縮約される

5.2 くりこみ群の構成の手順

くりこみ群変換の基本的な手順である「消去」と「rescaling」は以下のように行われる．

短距離の自由度の消去はノイズの短距離成分についてのみ平均をとることによる．あらかじめ紫外切断 Λ を入れて，拡大比 $L > 1$ も決めてあるとする．空間方向の波数ベクトルの長さによって全 Fourier mode を $0 \leq |k| \leq L^{-1}\Lambda$ と $L^{-1}\Lambda \leq |k| \leq \Lambda$ の２つの部分に分ける．これに応じて u, η も

$$u = u_< \ + \ u_>, \quad \eta = \eta_< \ + \ \eta_> \tag{35}$$

というように分ける．前述の Fourier 変換した Langevin 方程式はこれらの間の２つの函数方程式とみなせる．ここから $u_>$ を消去して，$u_<$ を $\eta_<$ と $\eta_>$ の汎函数と考える．1-loop order の計算ではこの消去操作は具体的にできるが，all order で扱うには無限次元の陰函数定理が必要である．この汎函数 $u_< = F[\eta_<, \eta_>]$ を $\eta_>$ について平均したものを $\tilde{u}$ と書く：

$$\tilde{u} =< F[\eta_<, \eta_>] >_{\eta_>} \quad (< \quad >_{\eta_>} \text{ は } \eta_> \text{ についての平均}). \tag{36}$$

こうして定義された $\tilde{u}$ は $\eta_<$ の汎函数である．

次に変数の rescaling を行う．これは次のようにする．

$$
\begin{aligned}
k' &= Lk, & \omega' &= L^z\omega, \\
u'(\omega', k') &= L^{-d-\chi-z}\tilde{u}(\omega, k) & \eta'(\omega', k') &= L^{-d-\chi}\eta_<(\omega, k).
\end{aligned} \tag{37}
$$

この段階では z, χ は任意だが，後に示すようなやり方でくりこみ群の固定点から決まる値を選ぶと，ちょうどスケーリング則の指数を与える．こうして定義された u' は η' の汎函数である．

話はこれで終わりではない．いまの場合くりこみ群は Langevin 方程式を新たな Langevin 方程式に変換するもの，つまり $(K, \eta) \to (K', \eta')$ という変換として定義されるべきである．従って u' をノイズ η' の汎函数と考えるだけでは不十分で，u' を

$$
\partial_t u' = K'[u'] + \eta' \tag{38}
$$

という形の Langevin 方程式の解として特徴付けなければならない．1-loop order の計算ではこのような Langevin 方程式への書き換えは具体的にできて，その近似の範囲で確かに Langevin 方程式はもとと同じ形の Burgers 方程式となることがわかる．（ただし ν, λ は変化するし，η の共分散のパラメータ D も上の rescaling に伴って変化している）．all order の計算や摂動論によらない厳密な取り扱いを考えるときには，$u \to \tilde{u}$ の段階と同様に，ここでも無限次元空間での陰函数定理に訴えて η' を u' の汎函数 $\eta' = G[u']$ とみなし，$K'[u']$ を $K'[u'] = G[u'] - \partial_t u'$ と定義することになる．

ここで注意すべきなのは，こうして得られる $K'[u']$ が一般に u' の複雑な汎函数で，Burgers 方程式の決定論的部分と同じ形をもつことはとうてい期待できない，ということである．これは平衡系の場合のくりこみ群変換の構成でも起こることで，H が例えば Landau-Ginzburg 模型であっても H' は一般にはそういう形をしていない．

Wilson 流のくりこみ群理論では，このようにくりこみ変換を経て複雑になった Hamiltonian を「主要な」部分と「お釣り」の部分（Wilson の言葉では「relevant」と「irrelevant」）に分け，前者はもとの Hamiltonian のパラメータを変えたものであり，また後者はくりこみ群変換を繰り返せば次第に消えて行くものであることを示す．例えば Landau-Ginzburg 模型の場合は

$$
H'[u'] = \int dx \left(\frac{\nu'}{2}(\nabla u')^2 + \frac{\mu'}{2}u'^2 + \frac{\lambda'}{4}u'^4 \right) + (\text{irrelevant}) \tag{39}
$$

となる．普通の場の理論でくりこみ群と称しているのは relevant な部分に射影したくりこみ群の作用のことである．同じことをいまの場合にも期待するならば

$$
K'[u'] = \nu'\nabla^2 u' + \frac{\lambda'}{2}(\nabla u')^2 + (\text{irrelevant}) \tag{40}
$$

となるはずである．もちろんその後のくりこみ群変換がこの形を保ちながら進むことも確かめなければならない．

動的くりこみ群の概念を数学的に明確に定式化しようとすれば，以上のようなことを少なくとも形式的摂動論のレベルですべて検証しておかなければ話にならないが，そこまで徹底して考えている文献をまだ知らない．多分これは open problem である．しかしそれができたとしても，この形でさらに厳密な（非摂動論的）構成まで進むのは非常に大変で，何か別の工夫が必要ではないかと思われる．

一つの可能性として Martin, Siggia, Rose の論文 [16] に基づいて De Dominics, Peliti [17] が提案した一種の Langange 形式を利用することが考えられる．Martin 達は u に対して「共役な場」$\hat{u}$ を導入して Langevin 方程式の取り扱いを場の理論の形式に近づけることを試みている．De Dominics 達はこれを Lagrange 形式，つまり u, $\hat{u}$ に関する

$$Z[J,\hat{J}] = \int \mathcal{D}u\mathcal{D}\hat{u} \exp\left(i \int dtdx \Big(J(t,x)u(t,x) + \hat{J}(t,x)\hat{u}(t,x) \Big) + A[u,\hat{u}] \right) \tag{41}$$

という形の汎函数積分に書き直している.（しかもそれはノイズを Gauss 型と仮定しない場合にも使える.）そこで Langevin 方程式のかわりにこのような Lagrange 形式を用いれば平衡系（あるいは場の理論）のくりこみ群の理論と類似の取り扱いができるのではないか？

ただしこのアイディアには一つ難点がある（これについては研究会で服部氏から注意を受けた）．Lagrange 形式で見ると Martin 達の共役場は実は一種の Lagrange multiplier である．このような Lagrange multplier を導入すると，いままで Langevin 方程式レベルでの議論に必要だった陰函数を解く操作を回避できるのである．これにより少なくとも摂動論的くりこみ群の取り扱いは見通しよくなる．ところが一般に Lagrange multiplier を含む理論の作用函数・Hamiltonian は正値性を欠くので，正値性に頼る非摂動論的諸方法が使いにくい．いまの場合もそうなっているらしい．

この点を解決するにはむしろ u のみを含む汎函数積分を用いる方がよいだろう．そのような汎函数積分は上の $Z[J,\hat{J}]$ で $\hat{J}=0$ とおいて $\hat{u}$ を先に積分すれば得られるし，Langevin 方程式から直接に導くこともできる．この Lagrange 形式は Lagrange multiplier を用いるものよりも複雑だが，一応正値性をもっている．これを基礎に非摂動論的取り扱いを進めるべきかも知れない．

5.3 1-loop 計算の結果とスケーリング則の指数の決定

Kardar 達の 1-loop 計算の結果を以下に示す．これはくりこみ群の作用を relevant な結合定数の上の変換 $(\nu, D, \lambda) \to (\nu', D', \lambda')$ に射影し，さらにそれを摂動論的に計算して 1-loop の部分のみ残した近似計算である．その結果を $L \to 1$ の極限で連続的くりこみ群に書き直すと，スケールパラメータ $s \geq 0$ （$s \to \infty$ が赤外端に相当する）に関する次の微分方程式系になる．

$$\frac{d\nu}{ds} = (z - 2 + \frac{2-d}{4d} K_d \bar{\lambda}^2)\nu, \tag{42}$$

$$\frac{dD}{ds} = (z - d - 2\chi + \frac{1}{4} K_d \bar{\lambda}^2) D, \tag{43}$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = (z + \chi - 2)\lambda. \tag{44}$$

ここで K_d は空間次元 d によって決まる正定数，χ と z は rescaling に用いる指数，$\bar{\lambda}$ は無次元化された結合定数

$$\bar{\lambda} = \left(\frac{D}{\nu^3}\right)^{1/2} \lambda \tag{45}$$

である．$\bar{\lambda}$ 自身は次の閉じた方程式に従う．

$$\frac{d\bar{\lambda}}{ds} = \frac{2-d}{2}\lambda + \frac{2d-3}{4d} K_d \bar{\lambda}^3. \tag{46}$$

このくりこみ群の流れの特徴は $\bar{\lambda}$ 直線上の流れを調べることでわかる．物理的に意味があるのは $\bar{\lambda} \geq 0$ の領域である．ここに現れる固定点には自明なもの $\bar{\lambda} = 0$ と

$$\bar{\lambda}_* = \left(\frac{2d-4}{(2d-3)K_d}\right)^{1/2} \tag{47}$$

という値をもつ非自明なもの $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_*$ の２つがある．くりこみ群の流れの様子は空間次元によって異なる（図６）:

- $d > 2$ のときには $\bar{\lambda} = 0$ が安定固定点，$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_*$ が不安定固定点になる．$0 < \bar{\lambda} < \bar{\lambda}_*$（弱結合領域）ではくりこみ群の流れは $\bar{\lambda} = 0$（自明固定点）に収束する．これは系の長時間・長距離の振舞いがいわゆる「平均場理論」で記述されることを示唆している．$\bar{\lambda} > \bar{\lambda}_*$（強結合領域）ではくりこみ群の流れは無限遠点に向かうが，このようなところでは摂動論的解析が信頼できない．

- $d = 2$（臨界次元）ではこの不安定固定点が $\bar{\lambda} = 0$ に合流する．$\bar{\lambda} > 0$ 全域が強結合領域になり，摂動論的解析は信頼できない．

- $d = 1$ では $\bar{\lambda} = 0$ が不安定固定点，$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_*$ が安定固定点になる．この系の長時間・長距離の振舞いはこの安定固定点により支配されると考えられる．

このくりこみ群の流れは平衡系の Landau-Ginzburg 模型などに慣れ親しんだ眼から見るとかなり奇妙なものである．平衡系の Landau-Ginzburg 模型の場合は $d \geq 4$ のとき $\bar{\lambda} \geq 0$ に固定点は現れず，臨界次元 $d = 4$ のときも含めて全域が原点に引き寄せられる．$d < 4$ のときは Wilson-Fisher の ϵ–展開に従って $d = 4 - \epsilon$ という非整数次元で探ってみると，原点から安定固定点が分岐していることがわかる．他方，上の例の場合は臨界次元 $d = 2$ より上の次元では不安定固定点が分岐してくるし，$d = 2$ では全域が無限遠方に流れて行く（つまり平均場理論とは違う）．また $d < 2$ のところを見てみると，安定固定点が原点から分岐して来るのは実は $d = 3/2$ という奇妙な分数次元であることがわかる（このことが単に近似の引き起こした幻なのか何か深い意味があるのかよくわからない）．このような違いは，いまの場合 $\bar{\lambda}$ の方程式の右辺の３次の項の係数が d の値によって符号を変えることに起因する．１次の項の符号はどちらの模型でも変化する．

このようにくりこみ群の流れの様子がわかると，一般的処法に従って長時間・長距離の振舞いに関するスケーリング則を導くことができる．Kardar 達に習って，今まで不定にし

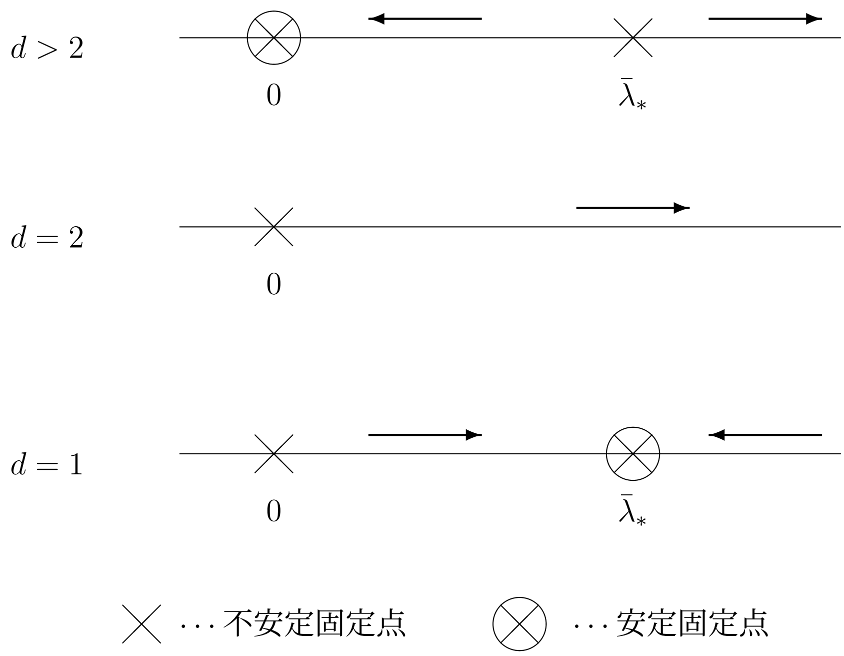

図 6: $\bar{\lambda}$ 直線上のくりこみ群の流れの様子

ていた指数 z, χ を $\bar{\lambda}$ 直線上の安定固定点 $\bar{\lambda}_\infty$ （それがスケーリング則を支配する）において

$$\frac{d\nu}{ds} = 0, \quad \frac{dD}{ds} = 0 \tag{48}$$

となるように決める．こうしておくと，$(\nu, D, \bar{\lambda})$ 空間において平面 $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_\infty$ が固定点集合になる．このようにして決まる指数がスケーリング則を特徴づける．例えば $u(t,x)$ の揺らぎに対するスケーリング則は

$$< (u(t,x) - u(t',x'))^2 > \sim \text{const.} |x - x'|^{2\chi} f(|t - t'|/|x - x'|^z) \tag{49}$$

となる．実際に今の状況に当てはめて見ると，

- $d > 2$ の場合，$\bar{\lambda}_\infty = 0$ なので z, χ の値は

$$z = 2, \quad \chi = (2 - d)/2 \tag{50}$$

  となる．$z = 2$ は確かに平均場理論の臨界指数としてよく知られた値である．

- $d = 1$ の場合，$\bar{\lambda}_\infty = \bar{\lambda}_*$ なので z, χ の値は

$$z = 3/2, \quad \chi = 1/2 \tag{51}$$

  となる．これは Huse 達が求めた値と一致している．

$d=2$ の場合はこのような方法は信頼性がないので，Kardar 達はランダム系の理論を援用して結論を引き出している．それによれば，$d=2$ でも数値的には $z\sim 3/2, \chi\sim 1/2$ となるようである．つまり指数は非平均場的でしかも $d=1$ とあまり変わらない．

空間１次元の場合，非自明固定点（$\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_*$）直上のモデルは何らかの意味で可解性を持っていると期待される．L'vov 達の論文 [12] でスケール不変な解と呼んでいるのはそれらを指す．Huse 達の議論 [11] をよく検討してみれば固定点直上理論の実体がわかるかも知れない．もともと Huse 達の議論自体，平衡分布 P_{st} が Gauss 型であることを使っており，可解性との関連を強く感じさせる．また，Forgacs 達 [13] によれば，ランダム系に対してレプリカ法と呼ばれる方法を適用するときにも，ちょうどこれに対応する状況で可解模型が現れるらしい．

6　まとめ

以上，ノイズのある Burgers 方程式の研究を紹介しながら，くりこみ群の方法の新たな可能性を非平衡統計力学の中に探ってみた．Langevin 方程式型の問題に対する動的くりこみ群の方法は 平衡系に対するくりこみ群の方法とほぼ同じ頃に現れているが，いまでは平衡系の場合に比べて数学的な整備が立ち後れているという印象が否めない．同じく確率論系統の問題でありながらランダム系の理論は近年著しい進展を遂げており，技術上の問題についてそこから学ぶべきことは多いように思う．

ノイズのある Burgers 方程式には視点を変えることによってさまざまな側面が見えてくる（ある意味で平衡系における Ising 模型の位置づけを思わせる）面白さがある．第一にこの方程式は Heisenberg 方程式や Navier-Stokes 方程式と並んで動的くりこみ群の方法がかなり早い時期に適用された例であり，よく親しまれている．第二に，空間１次元の場合にはくりこみ群の非自明固定点が存在し，それに付随するスケーリング則の指数が正確に決定されている．第三に，この方程式はランダム系のモデルとも解釈できるので，ランダム系の理論とのつながりを探る材料としても使える．第四に，Kuramoto-Sivashinsky 方程式との関連に見られるように，これは決定論的時空カオスを確率過程としてモデル化する（あるいはその逆の）問題を考える一つの材料でもある．この他にも，ここでは取り上げなかったが，セルオートマトンによる偏微分方程式のモデル化の問題などとも関わりがあるだろう．

今後の課題をいくつか掲げておく．まず第一に，動的くりこみ群の理論を数学的に整備することは何よりも基本的な課題だろう．ただ，静的くりこみ群の場合には構成的場の理論への応用という強力な動機が８０年代の大進展をもたらしたのだが，動的くりこみ群には今のところそれに相当する大目標が見あたらない（少なくとも筆者には見えていない）のが難点ではある．第二に，Kuramoto-Sivashinsky 方程式との関係を数学的にもっと厳密に検証することが大切だろう．また，非線形可積分系と関係が深いものに限っても，時空カオス的振舞いを示す方程式の例は複素 Landau-Ginzburg 方程式を始めとしていろいろ知られている [18]．その中に同様の解析ができるものはないだろうか．さらに，セルオートマトンのような離散系についてはどうか．第三に，可解模型との関係を探ることが掲げられる．これまで可解模型といえばもっぱら平衡統計力学や低次元場の理論の話題だったが，非

平衡系の中にもそういうものを見つけられると面白い．動的くりこみ群の固定点直上理論はそのようなものの候補と期待される．従っていろいろな場合について動的くりこみ群の流れをせっせと計算してみるべきだろう．他方では，Lotka-Volterra 系や Calogero-Moser 系などの非線形可積分系の方向から探りを入れることも大切だろう．

研究会を通じて伊藤栄明，岡部靖憲，高橋陽一郎，服部哲弥の各氏から数多くの助言や注意をいただきました．ご指摘いただいたことはどれもこの記事のなかに何らかの形で言及しました．最後になりましたが，この場をお借りして厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] Wilson, K., and Kogut, J., The renormalization group and the ϵ expansion, Phys. Rep. 12 (1974), 75-200.

[2] Ma, S.-K., Modern theory of critical phenomena (Benjamin, London, 1976).

[3] Osterwalder, K., and Stora, R. (eds)., *Critical phenomena, random systems, gauge theories*, Les Houches Session XLIII, 1984 (North-Holland, Amsterdam, 1986).

[4] 中野藤夫，木村初男，相転移の統計熱力学（朝倉書店，１９８９）．

[5] 土井正男，小貫明，高分子物理・相転移ダイナミクス，岩波講座現代の物理学 vol. 19（岩波書店，１９９３）．

[6] Burgers, J.M., The nonlinear diffusion equation (Reidel, Boston, 1974).

[7] Forster, D., Nelson, D.R., and Stephen, M.J., Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid, Phys. Rev. A16 (1977), 732-749.

[8] Kardar, M., Parisi, G., and Zhang, Y.-C., Dynamic scaling of growing interfaces, Phys. Rev. Lett. 56 (1986), 889-892.

[9] Medina, E., Hwa, T., Kardar, M., and Zhang, Y.-C., Burgers equation with correlated noise: Renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth, Phys. Rev. A39 (1989), 3053-3075.

[10] Ma, S.-K., and Mazenko, G.F., Critical dynamics of ferromagnets in $6-\epsilon$ dimensions: General discussion and detailed calculations, Phys. Rev. B11 (1975), 4077-4100.

[11] Huse, D.A., Henley, C., and Fisher, D.S., Phys. Rev. Lett. 55 (1985), 2924.

[12] L'vov, V.S., Lebedev, V.V., Paton, M., and Procaccia, I., Proof of scale invariant solutions in the Kardar-Parisi-Zhang and Kuramoto-Sivashinsky equations in $1+1$ dimensions: analytical and numerical results, Nonlinearity 6 (1993), 25-47.

[13] Forgacs, G., Lipowsky, R., and Nieuwenhuizen, Th.M., The behaviour of interfaces in ordered and disordered systems, in: *Phase Transition and Critical Phenomena*, vol. 14, pp. 139-363 (Academic Press, Boston, 1991).

[14] Yakhot, V., Phys. Rev. A24 (1981), 621.

[15] Zaleski, S., A stochastic model for the large scale dynamics of some fluctuating interfaces, Physica D34 (1984), 427-438.

[16] Martin, P.C., Siggia, E.D., and Rose, H.A., Statistical dynamics of classical systems, Phys. Rev. A8 (1978), 423-437.

[17] De Dominics, C., and Peliti, L., Field-theory renormalization and critical dynamcis above T_c: Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems, Phys. Rev. B18 (1978), 353-376.

[18] 川原琢治, ソリトンからカオスへ（朝倉書店, １９９３）.