

変数分離法が甦る

高崎 金久 京都大学総合人間学部

概要

最近, 19 世紀の変数分離法が現代的な可積分系の視点から見直されている. 簡単な可積分系を例に選んで, 現代に復活した変数分離法の考え方を紹介する.

1 背景

可積分系の研究が本格的に始まったのは 19 世紀であるが, その背景はいうまでもなく Hamilton と Jacobi による新しい力学系の理論である. Hamilton-Jacobi 理論の枠組みの中で, Liouville による可積分系の概念の一般的定式化 (Liouville 可積分性) やさまざまな可積分系 (楕円体上の測地流, 球面上の Neumann 系, Kowalevskaja のコマなど) の発見がなされている [1].

これらの可積分系を解くために用いられた方法は, いずれの場合も, 基本的には「変数分離法」である. ここで言う変数分離法は, 水素原子の固有値問題の解法 (対称性に基づく, いわば Lie 理論的な変数分離法) とは違う. むしろ関連が深いのは, 楕円体座標による変数分離の話 (そこから Lamé の方程式が出てくる) である. これは物理数学の中では「古くさい上に, 難しい」と敬遠されることの多い話題だろう.

80 年代 (もちろん 20 世紀の!) になって, Sklyanin がこの古くさいはずの話題を Lax 形式に基づく現代的な可積分系の理論の枠組みで (しかも古典系と量子系の両面

から) 再び取り上げて, そこに豊かな数学的世界が広がっていることを明らかにした [2]. 最近では, 可積分系の多重 Hamilton 構造の視点から変数分離法を考える, という新しい研究も行われている [3].

2 Calogero の方程式

Morosi と Tondo [4] が可積分系に対する変数分離法の面白い例を与えているので紹介する. これは昔 Calogero が与えた可積分系の例で,

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^N \frac{e^{p_j} - cq_j^N}{\prod_{k \neq j} (q_j - q_k)} \quad (1)$$

という Hamiltonian によって定義される (c は定数, q_j, p_j は正準変数). 運動方程式は次のようになる:

$$\ddot{q}_j = 2 \sum_{k \neq j} \frac{\dot{q}_j \dot{q}_k}{q_j - q_k} + cq_j \quad (2)$$

19 世紀以来の古典的な方法に従って, この系の Hamilton-Jacobi 方程式

$$H(q_1, \dots, q_N, \partial_{q_1} S, \dots, \partial_{q_N} S) = E$$

の完全解 (すなわち N 個の任意定数 u_1, \dots, u_N を含む解) を変数分離形

$$S = \sum_{j=1}^N S_j(q_j, u_1, \dots, u_N) \quad (3)$$

(S_j は q_j のみに依存する) で求めることを考える. そのような完全解が得られれば,

u_j と共役な変数を $\phi_j = \partial_{u_j} S$ で定義することによって「作用・角変数」が得られる。

上のような S の ansatz を Hamilton-Jacobi 方程式に代入すると

$$\sum_{j=1}^N \frac{\exp S'_j(q_j) - cq_j^N}{Q'(q_j)} = E$$

ただし $Q(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - q_j)$ である。ここで補間公式

$$\sum_{j=1}^N \frac{q_j^{N-k}}{Q'(q_j)} = \delta_{k,1} \quad (k = 1, \dots, N)$$

を用いると、上の Hamilton-Jacobi 方程式が満たされるためには、任意定数 u_2, \dots, u_N および $u_1 = E$ に対して

$$\exp S'_j(q_j) - cq_j^N = \sum_{k=1}^N u_k q_j^{N-k} \quad (4)$$

という等式が満たされればよいことがわかる。この方程式は常微分方程式で、ただちに

$$S_j(q_j) = \int^{q_j} \log P(\lambda) d\lambda \quad (5)$$

と解ける（積分定数は適当に処理する）。ただし $P(\lambda) = c\lambda^N + \sum_{k=1}^N u_k \lambda^{N-k}$ である。こうして完全解が得られる。

以上は 19 世紀的な解法そのものであるが、実はこの議論の中に、Sklyanin の方法で基本的な役割を果たす「スペクトル曲線」（Sklyanin の議論ではスペクトル曲線は Lax 形式から現れる）に相当するものが隠れている。それを見るために $p_j = \partial_{q_j} S_j$ という関係に注目する。これによって (4) は運動量と座標の関係

$$e^{p_j} = P(q_j) \quad (6)$$

に読み替えられる。言い換えれば、 (p_j, q_j) は同一の「曲線」 $e^\mu = P(\lambda)$ の上にある N 個の点であり、もとの Hamilton 系はこれ

らの点の運動（独立ではない！）を記述している。この曲線が今の場合のスペクトル曲線に相当する役割を担っているのである。

ちなみに、 u_j 達は H と可換な保存量 H_j に対応する。それは Hamiltonian として ϕ_j 軸に沿う線形流を引き起こす。

3 その他の場合も同様

19 世紀に見いだされた可積分系で同様の議論を繰り返せば、 $\mu^2 = P(\lambda)$ という形の超楕円曲線が現れる。これらの可積分系の中には KdV 方程式と関係するものもあるが、上のような枠組みはそのような対応関係を理解するのに便利である。

周期的戸田格子からは $2 \cosh \mu = P(\lambda)$ という曲線が現れるが、これは (λ, e^μ) を座標とする超楕円曲線である。さらに周期的戸田格子から非周期的戸田格子（戸田分子）への極限移行を行うと、曲線の方程式の左辺が $\cosh \mu \rightarrow e^\mu$ と変わるが、これは上の Calogero の方程式に現れる曲線と同じ形をしている！

このように、変数分離法を仲介にして、見かけの異なる系の間関係を見いだすこともできる。

参考文献

- [1] M. Audin, コマの幾何学, 高崎金久訳 (共立出版, 2000) .
- [2] E.K. Sklyanin, Prog. Theor. Phys. Suppl. 118 (1995), 35-60, およびその引用文献.
- [3] M. Błaszak, e-print nlin/0004002, およびその引用文献.
- [4] G. Tondo and C. Morosi, e-print solv-int/9811008.