# 変数分離法が甦る

高崎金久（京大・総人）

〜19Cの変数分離法を
現代的な可積分系の視点
から見直す〜

1. 背景
2. 変数分離の例
3. 曲線上の点の力学系
4. まとめ

# 1. 背景

$\boxed{19\text{c}}$

- Hamilton-Jacobi 理論

  $q_j, p_j$, $H(q, p)$ 正準方程式

  $(q_j, p_j) \longrightarrow (Q_j, P_j)$ 正準変換

- J. Liouville:「可積分系」の概念

  包合的保存量(第1積分)の

  存在する系.

  $$\{H, F_j\} = 0$$

  $$\{F_j, F_k\} = 0$$

- 様々な可積分系

  Jacobi: 楕円体面上の測地流

  C. Neumann: 球面上の質点力学系

  Kowalevskaya, Steklov, Weber: 剛体運動

少し遅れて (20c) Garnier

☆ Jacobi, Neumann, Kowalevskaya, Steklov, Weber ....

— いずれも超楕円曲線上の Abel 積分・Abel 函数で解ける

$$y^2 = R(x)$$

— 解法は基本的に「変数分離法」

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E \quad \left(\begin{array}{c}\text{Hamilton-}\\ \text{Jacobi 方程式}\end{array}\right)$$

完全解 $S = S(q_1, \cdots, q_N, \underbrace{I_1, \cdots, I_N}_{N\text{個の任意定数}})$ を求める

☆ 19C 末：Stäckel

この種の可積分系の一般的特徴づけ・分類を与えた

e.g. $$H = \sum_{j=1}^{N} g^{jj}(q_1, \cdots, q_N)\,(p_j^2 + V_j(q_j))$$

$g^{jj}(q_1, \cdots, q_N)$ に対する条件
(Stäckel 条件)

☆「量子論」もある.

e.g. 球面調和函数の
楕円体座標による変数分離

↓

Lamé の方程式 +

多項式解の存在条件

今日的に見れば「Bethe Ansatz」
の一種

---

Lax 形式も Bethe Ansatz もない
時代にこういうことが行われていた!

---

1980年代 : Sklyanin によって
Lax 形式の下で復活