変数分離法が甦る

高崎金久（京大・総人）

～19Cの変数分離法を
現代的な可積分系の視点
から見直す～

1. 背景
2. 変数分離の例
3. 曲線上の点の力学系
4. まとめ

1. 背景

$\boxed{19\ c}$

- Hamilton-Jacobi 理論

  $q_j,\ p_j,\quad H(q,p)$ 正準方程式

  $(q_j, p_j) \longrightarrow (Q_j, P_j)$ 正準変換

- J. Liouville：「可積分系」の概念

  包合的保存量（第1積分）の
  存在する系.

  $$\{H, F_j\} = 0$$
  $$\{F_j, F_k\} = 0$$

- 様々な可積分系

  Jacobi：楕円体面上の測地流

  C. Neumann：球面上の質点力学系

  Kowalevskaya, Steklov, Weber：剛体運動

少し遅れて (20c) Garnier

☆ Jacobi, Neumann, Kowalevskaya, Steklov, Weber ....

— いずれも超楕円曲線上の Abel 積分・Abel 函数で解ける

$$y^2 = R(x)$$

— 解法は基本的に「変数分離法」

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E$$ (Hamilton-Jacobi 方程式)

完全解 $S = S(q_1, \cdots, q_N, \underbrace{I_1, \cdots, I_N}_{N\text{個の任意定数}})$ を求める

☆ 19C 末：Stäckel

この種の可積分系の一般的特徴づけ・分類を与えた

e.g. $$H = \sum_{j=1}^{N} g^{jj}(q_1, \cdots, q_N)\left(p_j^2 + V_j(q_j)\right)$$

$g^{jj}(q_1, \cdots, q_N)$ に対する条件 (Stäckel 条件)

☆「量子論」もある.

e.g. 球面調和函数の
楕円体座標による変数分離

↓

Lamé の方程式 +
多項式解の存在条件

今日的に見れば「Bethe Ansatz」
の一種

Lax 形式も Bethe Ansatz もない
時代にこういうことが行われていた!

1980年代: Sklyanin によって
Lax 形式の下で復活

2. 変数分離の例 (Moroşi & Tondo)

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{e^{p_j} - c q_j^N}{\prod_{k(\neq j)} (q_j - q_k)} \qquad (c:\text{定数})$$

$$\ddot{q}_j = 2 \sum_{k(\neq j)} \frac{\dot{q}_j \dot{q}_k}{q_j - q_k} + c \dot{q}_j$$

(Calogeroの方程式)

類似のHamiltonian:

- $H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2 - c q_j^N}{\prod_{k(\neq j)} (q_j - q_k)}$: Stäckel型のHamiltonianの例

- $H = \sum_{j=1}^{N} \frac{f(\lambda_j) \mu_j^2 - c \lambda_j^N}{\prod_{k(\neq j)} (\lambda_j - \lambda_k)}$: 楕円体座標で書いたJacobi-Neumann系

- $H = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2\cosh \mu_j - c \lambda_j^N}{\prod_{k(\neq j)} (\lambda_j - \lambda_k)}$: 補助スペクトル変数で書いた周期的戸田格子

λ_j, μ_j : 正準共役 (Lax形式を用いて定義される)

変数分離の方法:

Hamilton-Jacobi 方程式

$$H\left(q_1, \cdots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_N}\right) = E$$

変数分離形の完全解

$$S = \sum_{j=1}^{N} S_j(q_j, \underbrace{u_1, \cdots, u_N}_{\text{任意定数}})$$

を求める.

$S = \Sigma S_j$ を Hamilton-Jacobi 方程式に代入すると

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{e^{S_j'(q_j)} - c q_j^N}{Q'(q_j)} = E$$

ただし $\quad Q(\lambda) = \prod_{j=1}^{N}(\lambda - q_j)$

$e^{S_j'(q_j)} - c q_j^N$ が次の形であれば

この方程式は満たされる: $\boxed{u_1 = E}$

$$\boxed{e^{S_j'(q_j)} - c q_j^N = u_1 q_j^{N-1} + \cdots + u_N}$$

なぜなら，$Q(\lambda)$についての補間公式

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{q_j^{N-k}}{(\lambda-q_j)Q'(q_j)} = \frac{\lambda^{N-k}}{Q(\lambda)} \quad (k=1,\cdots,N)$$

から（$\lambda=\infty$での留数を拾い出すことで）

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{q_j^{N-k}}{Q'(q_j)} = \delta_{k,1}$$

という恒等式が成立するからである．

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{u_1 q_j^{N-1} + \cdots + u_{N-1} q_j + u_N}{Q'(q_j)}$$

$$= u_1 \underbrace{\sum \frac{q_j^{N-1}}{Q'(q_j)}}_{=1} + \cdots + u_{N-1} \underbrace{\sum \frac{q_j}{Q'(q_j)}}_{=0} + u_N \underbrace{\sum \frac{1}{Q'(q_j)}}_{=0}$$

$= u_1$.

上で得られた方程式を S_j' について解いて

$$S_j'(q_j) = \log P(q_j),$$

ただし $P(\lambda) = c\lambda^N + \sum_{k=1}^{N} u_k \lambda^{N-k}$

積分して

$$S_j(q_j) = \int^{q_j} \log P(\lambda)\, d\lambda$$

これを加えて求める完全解

$$\boxed{S = \sum_{j=1}^{N} \int^{q_j} \log P(\lambda)\, d\lambda}$$

が得られる.

---

u_k と共役な変数

$$\varphi_k = \frac{\partial S}{\partial u_k} = \sum_{j=1}^{N} \int^{q_j} \frac{\lambda^{N-k}}{P(\lambda)}\, d\lambda$$

これは「角変数」を与える.

$\dot{u}_k = 0, \quad \dot{\varphi}_k = \delta_{k1}$ (線形化!)

3. 曲線上の点の力学系

$$e^{S'_j(q_j)} = P(q_j)$$

$\downarrow$ $\qquad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = S'_j(q_j)$

$$e^{p_j} = P(q_j) \qquad j=1,\cdots,N$$

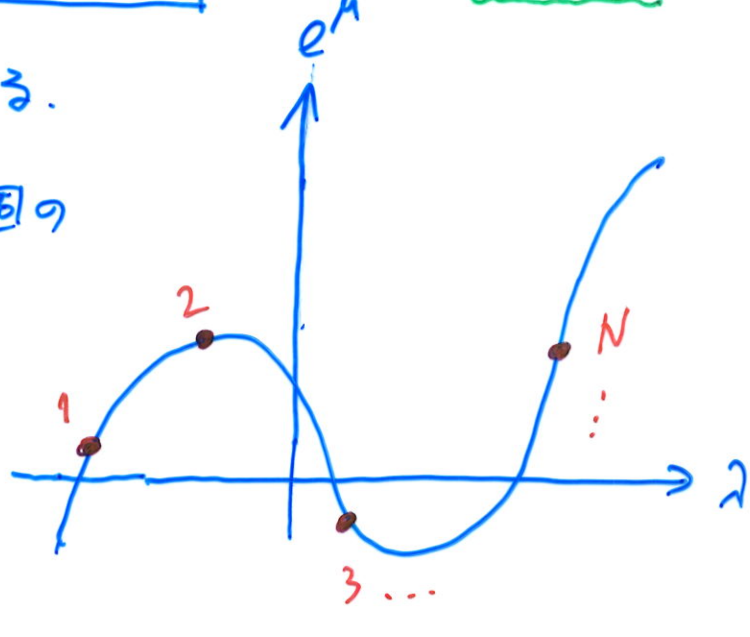
- (q_j, p_j) は曲線

$$\boxed{e^{\mu} = P(\lambda)}$$

← (λ, e^{μ}) 平面上の有理曲線！

の上にのっている.

→ 曲線上の N 個の点の力学系とみなせる.



- この曲線は「スペクトル曲線」に相当する

$$\boxed{\det(\lambda 1 - L(\mu)) = 0}$$

$L(\mu)$: L 行列

例: 周期的戸田格子

$$\det(\lambda 1 - L(\mu)) = 0$$

$$\downarrow$$

$$e^{\mu} + e^{-\mu} = P(\lambda) = \lambda^N + \sum_{k=2}^{N} u_k \lambda^{N-k}$$

$(u_1 = 0$: 重心枠$)$

(λ, e^{μ}) について genus $N-1$ (= 自由度)

の 超楕円曲線.

Sklyanin はこのような取り扱いを
周期的戸田格子の量子論に拡張した.
(量子変数分離法の始まり)

---

cf. 非周期的戸田格子からは有理曲線が
現われる:

$$e^{\mu} = P(\lambda)$$ ($e^{-\mu}$ が落ちる)

このような例は他にもある (有理型 Calogero-Moser,
有理型 Ruijsenaars-Schneider, etc) 量子化は?

00-10-06

11.

- Sklyaninの量子変数分離法は
  様々な系に応用されている.
  (Neumann, Calogero-Moser, Gaudin,
  Ruijsenaars-Schneider, DST, …)

- 変数分離(古典論)と
  可積分系の多重Hamilton構造
  の間に密接な関係があることが
  指摘されている
  (Magri et al, Morosi & Tondo,
  Blaszak, …)

- Lax表示をもつ可積分系から
  スペクトル曲線上の有限個の点(因子)
  の力学系が現れること自体は70年代から
  よく知られていた. Sklyaninの新しさは
  それに対して「変数分離」という解釈
  を与えた(復活させた)ことと「量子化」
  を行ったことである.

4. まとめ

- 可積分系に対する古典的な変数分離法は系をある曲線上の有限個の点の力学系として捉えるものと解釈できる.

- この曲線はスペクトル曲線に相当するものである.(Lax表示があれば実際に一致する.)こうして古典的な変数分離法と現代的なLax形式が自然に結びつく.

- ある種の可積分系からは有理曲線が現れる. これは系の単純さを反映しているが, 量子化の問題を探るにはこういう簡単な系が役に立つかも知れない.