SDiFF(2) 戸田方程式とその周辺(I)

高崎金久・武部尚志

Preprint RIMS-790, RIMS-814, KUCP-0039-91

— 背景：場の理論，一般相対論，…

— どんな方程式か？

— Lax形式，hierarchy

— 2-form と Darboux座標.

— tau函数

— twistor

— 無限小対称性

— cocycle・中心拡大

動機 — 新しい非線型可積分系の探索

位置づけ

1(+∞)次元：力学系

hierarchy

2(+∞)次元：ソリトン方程式
||
1+1

KdV, NLS, Sine-Gordon, …

シグマ模型, Ernst方程式, …

戸田分子, …

3(+∞)次元：KP方程式 (hierarchy)
||
1+2

戸田方程式 (戸田場, hierarchy)

Bogomolny 方程式 (Yang-Mills-Higgs)

4 (+∞)次元：自己双対 Yang-Mills
||
1+3
||
2+2

自己双対 Einstein

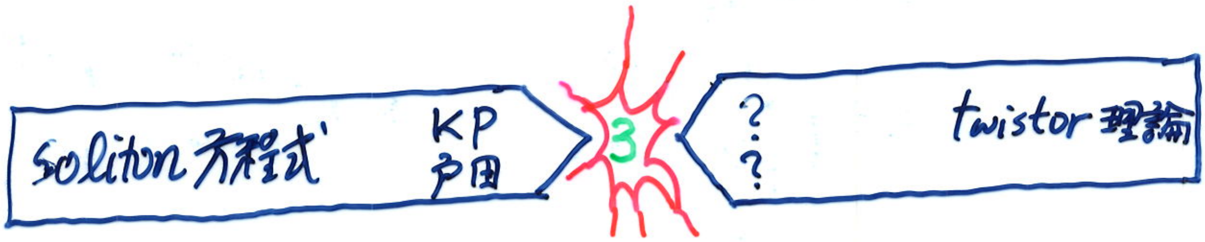
1, 2, ・・・ 3 ・・・ 4, 5, …

低次元 ⟷ 高次元

ソリトン …… ? …… twistor

問 twistor 理論に代表される高次元可積分系と
soliton 理論に代表される低次元可積分系の間の
gap を埋めるものは何か?

提案 "3次元"においてそれを見つけよう.



◎ Ward, Maison, Sparling, … / Woodhouse, …

自己双対 Y-M $\longrightarrow$ Bogomolny $\longrightarrow$ KdV, NLS, etc
($\longrightarrow$ Ernst, …)

◎ Bakas, Park, … / Saveliev, Vershik, … / Boyer, Finley

W_∞-代数 (W_N 代数の $N \to \infty$ 極限) が
su_N-戸田場の $N=\infty$ 極限 において現れる.

||

格子から連続体への移行

◎ Krichever, … / Dijgkraaf-Verlinde-Verlinde, Blok-Varchenko

KP hierarchy, Lax方程式の"準古典極限"
(dispersionless Lax equations)

どんな方程式か？

戸田方程式 (2-d 戸田場)：　$(z, \bar{z})$ 時空，　$i \in \mathbb{Z}$

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \phi_i + \exp(\phi_{i+1} - \phi_i) - \exp(\phi_i - \phi_{i-1}) = 0$$

$\varphi_i = \phi_i - \phi_{i-1}$

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi_i + \exp \varphi_{i+1} + \exp \varphi_{i-1} - 2 \exp \varphi_i = 0$$

格子間隔→0 の scaling limit：

$$\phi_i(z, \bar{z}) \longrightarrow \phi(z, \bar{z}, s) \qquad s \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_i(z, \bar{z}) \longrightarrow \varphi(z, \bar{z}, s) = \frac{\partial \phi(z, \bar{z}, s)}{\partial s}$$

2+1 次元の場の方程式：

$$\boxed{\begin{gathered} \partial_z \partial_{\bar{z}} \phi + \partial_s \exp \partial_s \phi = 0 \\ \left(\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi + \partial_s^2 \exp \varphi = 0 \right) \end{gathered}}$$

物理学者達はこれを SU(∞) 戸田方程式と呼んだ。

SU(∞) ≃ 2次元面積保存 (symplectic) diffeomorphism

SDiff (M)　M: surface

全く同じ方程式が、独立に、自己双対 Einstein 方程式の軸対称解を記述するものとして発見されていた。(Boyer, Finley)

Lax 形式

ϕ に対する方程式は次のように書き直せる.

$$\boxed{\partial_{\bar z}\mathcal{B} - \partial_z \bar{\mathcal{B}} + \{\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}\} = 0}$$

ここで

$$\mathcal{B} = \lambda e^{(-\alpha+\frac{1}{2})\partial_s\phi} + (\alpha+\tfrac{1}{2})\partial_z\phi,$$

$$\bar{\mathcal{B}} = \frac{1}{\lambda} e^{(\alpha+\frac{1}{2})\partial_s\phi} + (\alpha-\tfrac{1}{2})\partial_{\bar z}\phi.$$

(α : 任意定数 — ゲージパラメータ)

$$\{F, G\} = \{F, G\}_{\lambda, s} = \lambda\frac{\partial F}{\partial\lambda}\frac{\partial G}{\partial s} - \lambda\frac{\partial G}{\partial\lambda}\frac{\partial F}{\partial s}$$

(λ, s) に関する Poisson bracket !!

(以下 $\alpha = 1/2$ のゲージを主に考える)

比較: 格子上の戸田方程式の場合

$$\partial_{\bar z}B - \partial_z\bar B + [B, \bar B] = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} B &= e^{(-\alpha+\frac{1}{2})(\phi_{i+1}-\phi_i)} e^{\partial/\partial i} + (\alpha+\tfrac{1}{2})\partial_z\phi_i \\ \bar B &= e^{(\alpha+\frac{1}{2})(\phi_i-\phi_{i-1})} e^{-\partial/\partial i} + (\alpha-\tfrac{1}{2})\partial_{\bar z}\phi_i \end{aligned}\right\}$$ $\mathbb{Z}$ 上の差分作用素

$$e^{\partial/\partial i} \leftrightarrow \Lambda = (\delta_{i,j-1}) : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \text{ 行列}$$

$\{\lambda, s\} = \lambda$

$$[e^{\partial/\partial i}, i] = e^{\partial/\partial i}$$ (差分作用素の交換関係)

hierarchy

$$\left.\begin{array}{l} z_1(=z),\ z_2,\ z_3,\ \cdots\cdots \\ \hat{z}_1(=\bar{z}),\ \hat{z}_2,\ \hat{z}_3,\ \cdots\cdots \end{array}\right\}\ \text{独立変数}$$

$$\left.\begin{array}{l} B_1,\ B_2,\ B_3,\ \cdots \\ \hat{B}_1,\ \hat{B}_2,\ \hat{B}_3,\ \cdots \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} B_n = \lambda^n + b_{n,1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n,n} \\ \hat{B}_n = \hat{b}_{n,0}\lambda^{-n} + \hat{b}_{n,1}\lambda^{1-n} + \cdots + \hat{b}_{n,n-1}\lambda^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \partial_{z_n} B_m - \partial_{z_m} B_n + \{B_m, B_n\} = 0, \\ \partial_{\hat{z}_n} \hat{B}_m - \partial_{\hat{z}_m} \hat{B}_n + \{\hat{B}_m, \hat{B}_n\} = 0, \\ \partial_{\hat{z}_n} B_m - \partial_{z_m} \hat{B}_n + \{B_m, \hat{B}_n\} = 0 \end{array}}$$

$B_n, \hat{B}_n$ をどのような形に設定するか?

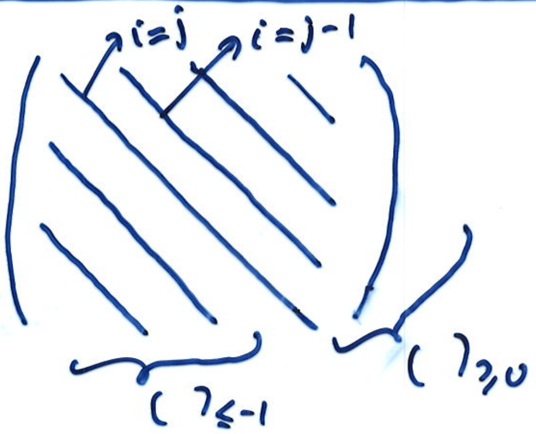
格子上の戸田方程式の場合

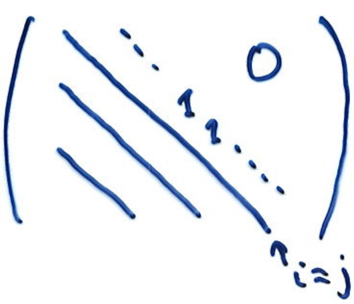
$$B_n = (L^n)_{\geq 0},$$

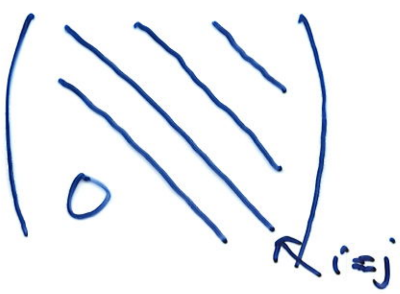
$$\hat{B}_n = (\hat{L}^{-n})_{\leq -1},$$

$$L = e^{\partial/\partial i} + u_0 + u_1 e^{-\partial/\partial i} + \cdots$$

$$\hat{L} = \hat{u}_1 e^{\partial/\partial i} + \hat{u}_2 e^{2\partial/\partial i} + \cdots$$



$L =$ 

, $\hat{L}^{-1} =$ 

これにならって，

$$\mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n)_{\geq 0} \qquad (\ \ )_{\geq 0} \cdots \lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \cdots$$

$$\hat{\mathcal{B}}_n = (\hat{\mathcal{L}}^{-n})_{\leq -1} \qquad (\ \ )_{\leq -1} \cdots \lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \lambda^{-3}, \cdots$$

$$\mathcal{L} = \lambda + u_0 + u_{-1}\lambda^{-1} + \cdots$$

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{u}_1\lambda + \hat{u}_2\lambda^2 + \cdots \qquad \left(\hat{\mathcal{L}}^{-1} = \frac{1}{\hat{u}_1}\lambda^{-1} - \frac{\hat{u}_2}{(\hat{u}_1)^2} + \cdots \right)$$

というように設定することを考える．$\mathcal{B}_n, \hat{\mathcal{B}}_n$ に対する前述の"零曲率方程式"と consistent であるためには $\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}}$ が次のような Lax 方程式系をみたせばよい．

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_{z_n}\mathcal{L} &= \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\}, & \partial_{\hat{z}_n}\mathcal{L} &= \{\hat{\mathcal{B}}_n, \mathcal{L}\}, \\ \partial_{z_n}\hat{\mathcal{L}} &= \{\mathcal{B}_n, \hat{\mathcal{L}}\}, & \partial_{\hat{z}_n}\hat{\mathcal{L}} &= \{\hat{\mathcal{B}}_n, \hat{\mathcal{L}}\} \end{aligned}}$$

本来の格子上の戸田方程式（あるいは KP hierarchy でもそうだが）では，ここで <u>線型問題</u> を考えて <u>波動函数</u> を導入する．

今の場合にはそれが何なのかはっきりしない!!

（そもそも上の Lax 方程式自体が $\mathcal{L}$ に対する線型方程式にも見えている．）

新しいアイディアが必要． ⟶ 自己双対 Einstein 方程式の取扱いにヒントあり．

2-form と Darboux 座標

$$\omega \underset{\text{def}}{=} \frac{d\lambda}{\lambda} \wedge ds + \sum_{n=1}^{\infty} dB_n \wedge dz_n + \sum_{n=1}^{\infty} d\hat{B}_n \wedge d\hat{z}_n$$

基本的性質：

$$\boxed{\begin{aligned} & d\omega = 0 \\ & \omega \wedge \omega = 0 \end{aligned}}$$

← 零曲率方程式と同等

⇒ ω は退化した symplectic 構造を定義する．

Darboux 座標 (P, Q) が存在する．

$$\omega = \frac{dP}{P} \wedge dQ$$

実は，$\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}}$ はそのような Darboux 座標の片割とみなせる．

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} n z_n \mathcal{L}^n + s + \sum_{n=-\infty}^{-1} v_n \mathcal{L}^n$$

$$\hat{\mathcal{M}} = -\sum_{n=1}^{\infty} n \hat{z}_n \hat{\mathcal{L}}^{-n} + s + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_n \hat{\mathcal{L}}^n$$

$$\boxed{\omega = \frac{d\mathcal{L}}{\mathcal{L}} \wedge d\mathcal{M} = \frac{d\hat{\mathcal{L}}}{\hat{\mathcal{L}}} \wedge d\hat{\mathcal{M}}}$$

⇕ 同等

実際，

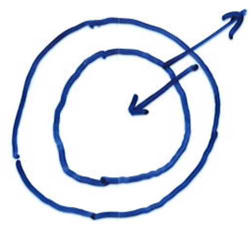
$$\partial_{z_n} K = \{B_n, K\}, \quad \partial_{\hat{z}_n} K = \{\hat{B}_n, K\} \quad \text{for } K = \mathcal{L}, \mathcal{M}, \hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{M}}$$

← $\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}}$ に対する Lax 方程式を自然に拡張したものになっている

$$\{\mathcal{L}, \mathcal{M}\} = \mathcal{L}, \quad \{\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{M}}\} = \hat{\mathcal{L}}$$

← 正準共役関係

twistor あるいは Riemann-Hilbert 問題



$(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ $|\lambda| > \rho - \varepsilon$, $|\mathcal{L}| > \rho - \varepsilon$ で解析的

$(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{M}})$ $|\lambda| < \rho + \varepsilon$, $|\hat{\mathcal{L}}| < \rho + \varepsilon$ 〃

とすると

$$d\mathcal{L} \wedge d\mathcal{M} = \omega = d\hat{\mathcal{L}} \wedge d\hat{\mathcal{M}}$$

から

$$\boxed{\begin{aligned} f(\mathcal{L}, \mathcal{M}) &= \hat{\mathcal{L}} \\ g(\mathcal{L}, \mathcal{M}) &= \hat{\mathcal{M}} \\ \{f(\lambda, s), g(\lambda, s)\} &= f(\lambda, s) \end{aligned}}$$

という函数の組 $f(\lambda, s)$, $g(\lambda, s)$ ができる。($\rho - \varepsilon < |\lambda| < \rho + \varepsilon$ で解析的)

$(\lambda, s) \to (f(\lambda, s), g(\lambda, s))$ は $\omega_0 = \frac{d\lambda}{\lambda} \wedge ds$ に関する正準変換である。(cylinder $S^1 \times R^1$ 上の面積保存 diffeo の複素化)

逆に これが十分に恒等変換に近ければ、上のような $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{M}})$ の存在がいえる。
(Riemann-Hilbert 問題の一種、但し、非線型)

一般に解くのは難しい。

これは自己双対 Einstein 方程式に対して Penrose が与えた解の構成法 (nonlinear graviton construction) の変形とみなせる。 — $\boxed{\text{twistor 理論との接点!!}}$

minitwistor

無限小対称性

(f,g) の無限小変形 $\longrightarrow$ $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{M}})$ の無限小変換

$$\left.\begin{array}{ll} \delta\mathcal{L} = \cdots, & \delta\mathcal{M} = \cdots \\ \delta\hat{\mathcal{L}} = \cdots, & \delta\hat{\mathcal{M}} = \cdots \end{array}\right\} \text{explicit formula}$$

tau 函数

$$d\log\tau = \sum_{n=1}^{\infty} v_{-n}\,dz_n - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_n\,d\hat{z}_n + \phi\,ds$$

右辺は closed form.

tau 函数に拡張された無限小対称性

$$\delta = \delta_{F,\hat{F}} \qquad \left.\begin{array}{l} F = F(\lambda, s) \\ \hat{F} = \hat{F}(\lambda, s) \end{array}\right\} \text{変換の母函数}$$

$$(f,g) \to \exp\varepsilon\{\hat{F}, \cdot\} \circ (f,g) \circ \exp(-\varepsilon)\{F, \cdot\}$$

Hamilton vector field

$$\delta_{F,\hat{F}} \log\tau = \cdots \qquad (\text{explicit formula})$$

anomalous commutation relation

$$\boxed{[\delta_{F_1,\hat{F}_1}, \delta_{F_2,\hat{F}_2}]\log\tau = \delta_{\{F_1,F_2\},\{\hat{F}_1,\hat{F}_2\}}\log\tau + c(F_1,F_2) + \hat{c}(\hat{F}_1,\hat{F}_2).}$$

Poisson 代数の cocycle (中心拡大)

$$c(F_1,F_2) = -\operatorname{res} F_2(\lambda,0)\,dF_1(\lambda,0), \quad \hat{c}(\hat{F}_1,\hat{F}_2) = \operatorname{res} \hat{F}_2(\lambda,0)\,d\hat{F}_1(\lambda,0)$$

まとめ

- $\mathbb{Z}$上の戸田方程式 $\xrightarrow{\text{scaling limit}}$ SDiff(2)戸田方程式
- 零曲率方程式, Lax方程式 ⟶ Poisson Bracketを基礎にするものに変わる
- closed, degenerate 2-formの存在, Darboux座標としての $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$, $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{M}})$ 対. ‖ twistor理論との比較
- $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ と $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{M}})$ を結ぶ SDiff(2) (2 = cylinder の複素化) の元 (f, g) の存在,
  逆構成としての Riemann-Hilbert 問題, 但し, SDiff(2)に関する. (従って非線型, 具体的に解くのは難しい.)
- (f, g) を SDiff(2) の中で動かすことにより, 解の変形, 従って無限小対称性が得られる.
- tau函数が導入できる. tau函数に対する無限小変換は commutator anomaly を呈する.
- 以上のことは 戸田方程式 hierarchy や KP hierarchy との著しい類似を示している. ("3-d" における soliton理論と twistor 理論の接点)