97-11-02
「可積分系と情報理論」
（神戸インスティチュート
日本オックスフォード大学カレッジ）

1

可積分系と代数曲線

京大総人・高崎金久

非線形可積分系と代数曲線の
（スペクトル曲線）
関係について
なるべく係数体によらない形で解説する。

（もしかしたら 有限体 — 従って符号理論
の設定 — でもやれるかも知れない，という
期待をいだきつつ…　）

例

- 周期的戸田格子
- Jacobi, Neumann 系

※ KdV方程式は有名だが，有限体には
なじみにくいような気がする。

戸田格子

q_j, p_j：座標と運動量

$$H = \frac{1}{2}\sum p_i^2 + \sum e^{q_i - q_{i+1}} \quad : \text{Hamiltonian}$$

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = e^{q_{i-1}-q_i} - e^{q_i - q_{i+1}}$$

Flaschka-Manakov の変数：

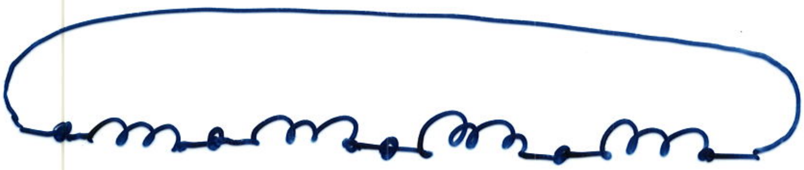
$$a_i = \frac{1}{2} e^{(q_i - q_{i+1})/2}, \quad b_i = \frac{1}{2} p_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{da_i}{dt} = a_i (b_i - b_{i+1}), \\[2mm] \dfrac{db_i}{dt} = 2(a_{i-1}^2 - a_i^2). \end{cases}$$

以下 q_i, p_i のことは忘れて，a_i, b_i で考える．

周期的境界条件：

$$a_{i+N} = a_i, \quad b_{i+N} = b_i$$



戸田格子のLax表示

無限格子の場合：

$$\cdots \quad n-1 \quad n \quad n+1 \quad \cdots$$

差分operator

$$L = a_n e^{\partial_n} + b_n + a_{n-1} e^{-\partial_n}$$

$$\updownarrow \qquad e^{\pm\partial_n} f(n) = f(n\pm1).$$

無限行列

$$L = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} n-1 & n & n+1 \end{array} \\ n) & \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & a_{n-1} & b_n & a_n & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

主対角線 $(i=j)$

a_n, b_n で書いた戸田方程式

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{dL}{dt} = [A, L],} \qquad (\text{Lax表示})$$

$$A := -a_n e^{\partial_n} + a_{n-1} e^{-\partial_n}$$

付随する線形問題

$$\begin{cases} a_n \psi_{n+1} + b_n \psi_n + a_{n-1} \psi_{n-1} = E \psi_n \\ \dfrac{d\psi_n}{dt} = -a_n \psi_{n+1} + a_{n-1} \psi_{n-1} \end{cases}$$

周期的格子の場合：

有限次元行列の Lax 方程式に書き直せる.

実は二通りの書き方がある. (一種の双対性)

$\boxed{N \times N \text{ 行列形式}}$

$$L(h) = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & a_{N-1}h^{-1} \\ a_0 & b_1 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{N-2} \\ a_{N-1}h & & & a_{N-2} & b_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$A(h) = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 & & & a_{N-1}h^{-1} \\ a_0 & 0 & -a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -a_{N-2} \\ -a_{N-1}h & & & a_{N-2} & 0 \end{pmatrix}$$

h : スペクトルパラメータ　　$\boxed{\psi_{i+N} = h\psi_i}$

$$\frac{dL(h)}{dt} = [A(h), L(h)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\det(EI - L(h)) = 0$$

等スペクトル性

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{スペクトル曲線} \\ \qquad \det(EI - L(h)) = 0 \\ \text{は時間によらない} \end{array}}$$

代数曲線

$\boxed{2\times 2\text{ 行列形式}}$

$$\Psi_n := \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix}, \quad a_n\psi_{n+1} + b_n\psi_n + a_{n-1}\psi_{n-1} = E\psi_n$$

$$\Psi_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{a_n}{a_{n+1}} & \dfrac{E-b_{n+1}}{a_{n+1}} \end{pmatrix} \Psi_n = M_n(E)\Psi_n$$

と書く.

$$\frac{d\psi_n}{dt} = -a_n\psi_{n+1} + a_{n-1}\psi_{n-1}$$

$$\frac{d\Psi_{n\cancel{+1}}}{dt} = \begin{pmatrix} E-b_n & -2a_n \\ 2a_n & -E+b_{n+1} \end{pmatrix} \Psi_n = B_n(E)\Psi_n$$

と書く.

これより次の 2×2 行列型 Lax 表示を得る：—

$$\frac{dM_n(E)}{dt} = B_{n+1}(E)M_n(E) - M_n(E)B_n(E).$$

— ここまでは<u>無限格子一般</u>で成立する.

周期的境界条件: $a_{n+N} = a_n,\ b_{n+N} = b_n$

$$M_{n+N}(E) = M_n(E).$$

このような場合には次のような行列(モノドロミー行列)が重要な役割を演じる:—

$$T_n(E) = M_{n+N-1}(E)\, M_{n+N-2}(E) \cdots M_{n+1}(E)\, M_n(E)$$

(特に $T_0(E)$ を単に $T(E)$ と書いたりする.)

実際, $T_n(E)$ に対しても次の方程式が成立する:—

$$\frac{dT_n(E)}{dt} = [B_n(E), T_n(E)]$$

特に $T_n(E)$ も等スペクトル的, つまり

$$\frac{d}{dt}\det(hI - T_n(E)) = 0,$$

$$\partial_n \det(hI - T_n(E)) = 0$$

$\boxed{n\text{によらない}}$

実は

$$\boxed{\det(EI - L(h)) = 0 \overset{\text{同値}}{\iff} \det(hI - T(E)) = 0}$$

スペクトル曲線の二通りの書き方(双対性)

戸田曲線（特殊な超楕円曲線）

具体的に展開すると，スペクトル曲線の方程式は次の形になる：—

$$h^2 - \Delta(E)h + 1 = 0$$

$$\Delta(E) = \mathrm{Tr}\, T(E). \quad (\det T(E) = 1)$$

EについてN次多項式

これをhについて解くと

$$h = \frac{\Delta(E) + \sqrt{\Delta(E)^2 - 4}}{2}$$

$$\left(h^{-1} = \frac{\Delta(E) - \sqrt{\Delta(E)^2 - 4}}{2} \right)$$

従って　$w = \sqrt{\Delta(E)^2 - 4}$　と書けば，
hは

$$w^2 = \Delta(E)^2 - 4$$

という形の超楕円曲線（genus $g \leq N-1$）の上の有理函数とみなせることがわかる．

退化して不等号になることがある

このとき戸田格子は g-phase の準周期的振動をしている．解は超楕円函数で書ける．

— 周期格子上に「ソリトン」が走っているように見える（こともある？）

戸田曲線の特殊性

• 特別な形の超楕円曲線

$$w^2 = \Delta(E)^2 - 4$$

$\Delta(E)$: N次の多項式（係数は運動の保存量）

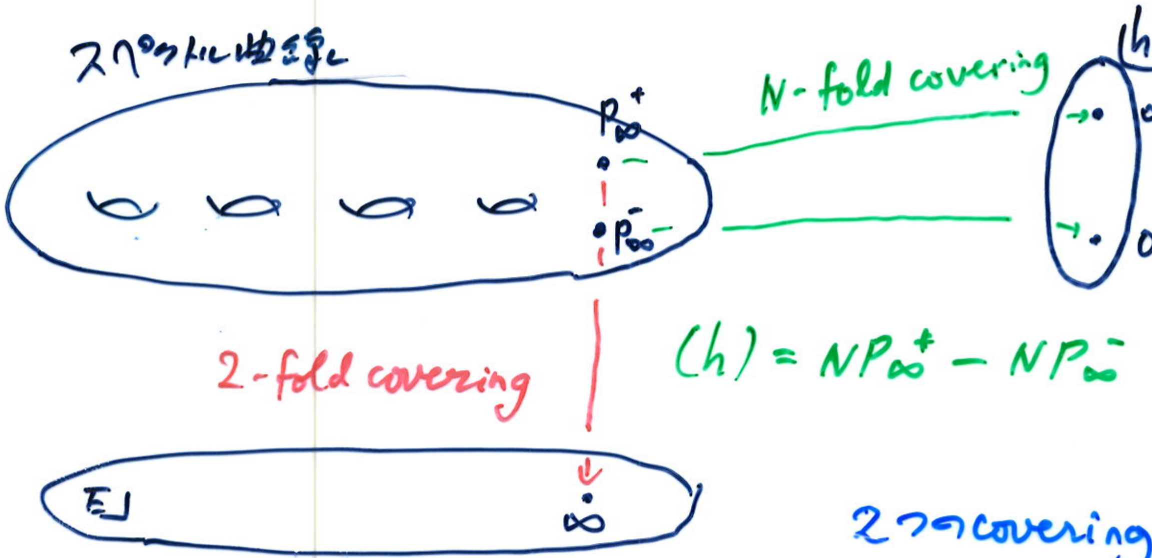
退化していないときには本質的に $g = N-1$ 個

一般の超楕円曲線は $2g$ 個程度のパラメータをもつ.

可積分系のスペクトル曲線の一般的特徴.

パラメータ = 運動の定数 : g 個

• h という特殊な有理型関数がある.



$$(h) = NP_\infty^+ - NP_\infty^-$$

2つのcoveringは2つのLax形式に対応している.

有限体上の戸田曲線？

$$\det(hI - T(E)) = 0 \qquad (2\times 2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\det(EI - L(h)) = 0 \qquad (N\times 2)$$

- 考えるだけならば勝手である．（$\mathbb{F}_q$ でも問題はない．）

- $\Delta(E) = c_0E^N + c_1E^{N-1} + \cdots + c_N \qquad \left(c_0 = \dfrac{1}{\prod a_i} = \mathrm{const}\right)$
  を一定に保って $T(E)$ または $L(h)$ を動かすと
  スペクトル曲線 S の Jacobi 多様体 $\mathrm{Jac}(S)$
  が現れる．（正確には $\mathrm{Jac}(S)$ から特殊因子のなす部分多様体を除いたもの．）：—

  $$\mathrm{Jac}(S) \setminus \Theta \cong \{(a_i, b_i) \mid \text{与えられた } \Delta(E) \text{ をもつ.}\}$$

  （これは戸田格子に限らず，広く可積分系一般に成立すること．）

- 実際に，$\mathrm{Jac}(S)$ 上の直線運動に対応するような（離散）力学系が $\mathbb{F}_q$ 上の設定の下でつくれないか？

  広田 et al の離散時間戸田方程式？

  （考えてみたが，まだ何ともいえない．）

- 符号？暗号？

Jacobi系・Neumann系

- $\begin{cases}\text{Jacobi系：双曲面上の測地流} \\ \text{Neumann系：~~曲~~球面上の調和振動子}\end{cases}$

本来は別のものだが，実は一つのものを二通りに見ているだけ.

- Neumann系の Hamiltonian：

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} a_k F_k = \frac{1}{2}\sum a_k q_k^2 + \frac{1}{2}\sum^{n+1} p_k^2$$

包合的保存量 (Uhlenbeck)：

$$F_k = q_k^2 + \sum_{l(\neq k)} \frac{(q_k p_l - q_l p_k)^2}{a_k - a_l}.$$

- 詳細はともかく，次のような超楕円曲線が スペクトル曲線 として現れる：—

$$\boxed{w^2 = f_1(z) f_2(z).} \qquad (g=n)$$

ここで $f_1(z) = \prod_{k=1}^{n+1}(z - a_k)$

$$f_2(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - b_j) = f_1(z)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{c_k}{z - a_k},$$

$F_k(q,p) = c_k$ (運動状態を定める)

- このスペクトル曲線は次のような Lax 方程式と関係している.
  (Moser?)

$$\boxed{\frac{dM(z)}{dt} = [B(z), M(z)]}$$

この場合も「双対系」がある. ($N\times N$, $N=n+1$)
… N次元の Euler top.

ここで
$$M(z) = \begin{bmatrix} V(z), & -U(z) \\ W(z), & -V(z) \end{bmatrix},$$

$$U(z) = \sum \frac{q_k^2}{z-a_k}, \quad V(z) = \sum \frac{q_k p_k}{z-a_k},$$
$$W(z) = 1 + \sum \frac{p_k^2}{z-a_k}.$$

$$\det(wI - M(z)) = w^2 - (UW - V^2) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad w^2 = f_1(z) f_2(z).$$

- 古典的な line geometry との関連

  Grassmann 多様体, Kummer 曲面, etc...

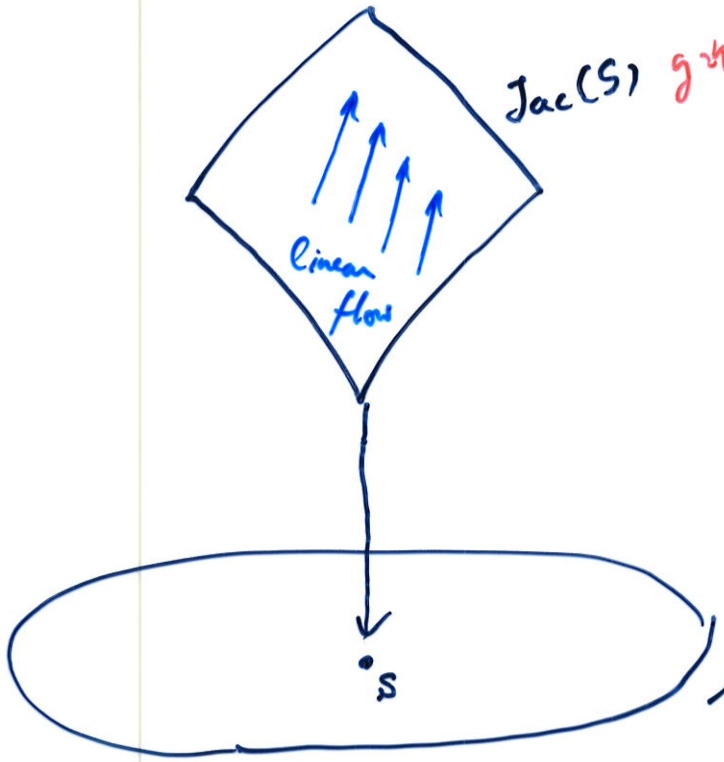
- Jacobi 多様体が見える.

$$\mathrm{Jac}(S) \setminus \Theta \simeq \{(U,V,W) \mid UW - V^2 = f_1(z) f_2(z)\}.$$

- 有限体ではどうか?

スペクトル曲線, Jacobi多様体, Lax operatorの関係

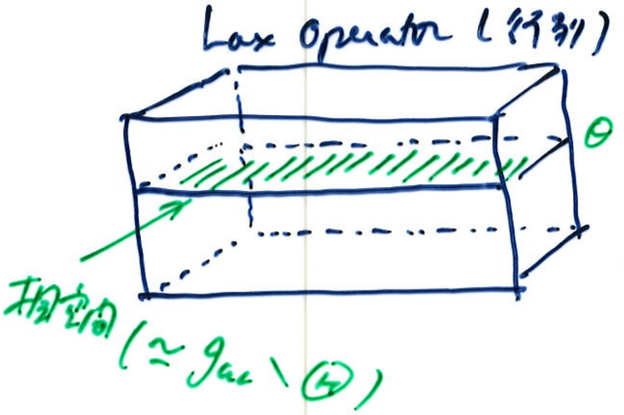
いろいろな場合に, 次のような描像が正しいようだ.



$\mathcal{M}$: スペクトル曲線のモジュライ空間 g次元
(運動のパラメータ空間)

$$\begin{array}{c} \mathcal{J}ac \\ \downarrow \\ \mathcal{M} \end{array}$$: 可積分系の相空間

Jacobian bundle



$L \longrightarrow$ 相空間を定めるパラメータ $\{\theta_\alpha\}$

(上の図ではすでに固定している.)

$\downarrow$

運動の定数 $\{h_i\}$

$\updownarrow$

スペクトル曲線 $S: f(z,w,\{h_i\})=0$

このように,

Lax形式を利用してJacobi多様体($\setminus\Theta$)の代数多様体としての構造を記述する試みが数多くなされている.

$\boxed{\text{有限体上では?}}$

まとめ

- 可積分系から スペクトル曲線と呼ばれる
  代数曲線が現れる.
- スペクトル曲線は 特殊な構造（g次元の
  パラメータ, Lax行列の固有値方程式としての
  表示, etc ）をもつ. （良い代数曲線族？）
- スペクトル曲線を止めて Lax行列を動かすと
  Jacobi多様体が見えてくる.
- 微分方程式を捨てれば 有限体上でも考えられる.
  有限体上では 離散可積分流（Jacobi
  多様体上では線形流となる）が考えられる
  のではないか, と期待される.