97-11-02
「可積分系と情報理論」
(神戸インスティテュート
日本キャプリンズカレッジ)

1

可積分系と代数曲線

京大総人・高崎金久

非線形可積分系と代数曲線の
関係について
(スペクトル曲線)
なるべく係数体によらない形で解説する。

(もしかしたら 有限体 — 従って符号理論
の設定 — でもやれるかも知れない，という
期待をいだきつつ……)

例
- 周期的戸田格子
- Jacobi, Neumann 系

※ KdV方程式は有名だが，有限体には
なじみにくいような気がする。

戸田格子

q_j, p_j : 座標と運動量

$$H = \frac{1}{2}\sum p_i^2 + \sum e^{q_i - q_{i+1}} \quad \text{: Hamiltonian}$$

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = e^{q_{i-1} - q_i} - e^{q_i - q_{i+1}}$$

Flaschka-Manakov の変数:

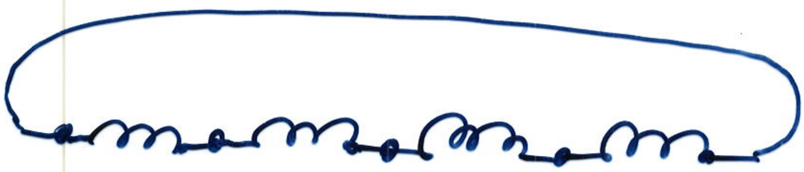
$$a_i = \frac{1}{2} e^{(q_i - q_{i+1})/2}, \quad b_i = \frac{1}{2} p_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{da_i}{dt} = a_i (b_i - b_{i+1}), \\[2mm] \dfrac{db_i}{dt} = 2(a_{i-1}^2 - a_i^2). \end{cases}$$

以下 q_i, p_i のことは忘れて, a_i, b_i で考える.

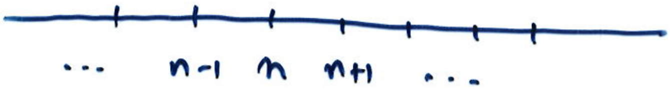
周期的境界条件:

$$a_{i+N} = a_i, \quad b_{i+N} = b_i$$



戸田格子のLax表示

無限格子の場合：



差分operator

$$L = a_n e^{\partial_n} + b_n + a_{n-1} e^{-\partial_n}$$

$$e^{\pm\partial_n} f(n) = f(n\pm 1).$$

$\Updownarrow$

無限行列

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ n) \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad n-1 & n & n+1 \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & a_{n-1} & b_n & a_n & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

主対角線 $(i=j)$

a_n, b_n で書いた戸田方程式

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{dL}{dt} = [A, L],} \qquad (\text{Lax表示})$$

$$A := -a_n e^{\partial_n} + a_{n-1} e^{-\partial_n}$$

付随する線形問題

$$\begin{cases} a_n \psi_{n+1} + b_n \psi_n + a_{n-1} \psi_{n-1} = E \psi_n \\ \dfrac{d\psi_n}{dt} = -a_n \psi_{n+1} + a_{n-1} \psi_{n-1} \end{cases}$$

周期的格子の場合：

有限次元行列のLax方程式に書き直せる。

実は二通りの書き方がある。（一種の双対性）

$\boxed{N \times N \text{ 行列形式}}$

$$
L(h) = \begin{pmatrix}
b_0 & a_0 & & & a_{N-1}h^{-1} \\
a_0 & b_1 & a_1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & a_{N-2} \\
a_{N-1}h & & & a_{N-2} & b_{N-1}
\end{pmatrix}
$$

$$
A(h) = \begin{pmatrix}
0 & -a_0 & & & a_{N-1}h^{-1} \\
a_0 & 0 & -a_1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & -a_{N-2} \\
-a_{N-1}h & & & a_{N-2} & 0
\end{pmatrix}
$$

h：スペクトルパラメータ　　$\boxed{\psi_{i+N} = h\psi_i}$

$$\frac{dL(h)}{dt} = [A(h), L(h)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\det(EI - L(h)) = 0$$

等スペクトル性

> スペクトル曲線
>
> $$\det(EI - L(h)) = 0$$
>
> は時間によらない

代数曲線