

漸近解析入門：なぜ漸近級数は発散するか？

京都大学総合人間学部基礎科学科

高崎 金久 (Kanehisa TAKASAKI)

解析的係数をもつ微分方程式では解を巾級数と指数函数の積の形で求めることがよく行われるが、不確定特異点においてそのような解を求めると収束半径 0 の発散級数になる。Poincaré はこのような形式的解を真の解の漸近展開として位置づけることによって、その後の常微分方程式論の大きな流れとなる分野を切り開いた [1]。今日では非常に大がかりな道具を駆使してこのような形式的解の発散現象（ならびにそれを漸近級数として意味づけるときに起こる Stokes 現象）の解析が行われているため、「なぜ漸近級数は発散するか？」という素朴な問いに対する答は複雑なものになりがちである。この記事では非常に簡単な（そして古典的な）微分方程式の例をとりあげて、Borel 総和法の視点からこれらの現象の入門的解説を試みる。これは最近の J. Ecalle の理論 [2] へと展開して行く視点でもある。

1 簡単な微分方程式の例

次の微分方程式（Euler 方程式）を考える。

$$-z \frac{dy}{dz} + y = \frac{1}{z}. \quad (1)$$

$z = \infty$ における解を次の巾級数の形で求めることを考える .

$$y = \hat{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n-1}. \quad (2)$$

係数 u_n は漸化式

$$nu_{n-1} + u_n = 0 \quad (n \geq 1), \quad u_0 = 1, \quad (3)$$

によって $u_n = (-1)^n n!$ と定まり , $\hat{u}(z)$ は

$$\hat{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^{-n-1} \quad (4)$$

となる . これは確かに収束半径 0 の形式的解である . 以下の話はこの形式的解をめぐって展開する .

なお , この方程式 (1) が非同次項をもつことは本質的ではない . 実際 , 方程式の両辺に z を掛けてから微分すると

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(1 - \frac{1}{z}\right) \frac{dy}{dz} - \frac{1}{z} y = 0 \quad (5)$$

という 2 階同次方程式になる . これは 2 階だからもとの方程式と同等であるはずはない . 実際 , 後者は上の $y = \hat{u}(z)$ 以外にもう一つ線形独立な解をもつはずだが , それは $y = e^z$ であることがわかる . ところがこの指数関数は (1) の非同次項を落とした方程式の解でもある . そのため後で (1) の Stokes 現象を解析するときにこれが再び現れる . それを見ると , 漸近性や Stokes 現象の解析に関しては 2 つの方程式は同等のものであることがわかる .

$\hat{u}(z)$ が発散級数であることはその形から明かであるが , Poincaré の意味でどのような解析的解の漸近展開であるかはすぐにはわからない . 実は (1) を常微分方程式の教科書通りに定数変化法で解いて得られる解

$$u(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{z-\zeta}}{\zeta} d\zeta \quad (6)$$

が求めるものである . ここで積分路は z から出発して無限遠点にいたる路で , その選び方によって積分の収束するところが異なる (無限遠点へ向かう路がいろいろあり得ることを示唆するため積分の終点を “ ∞ ” と書いてみた .) 例えば z が $|\arg z| < \pi$, つまり負の実

軸を除く領域を動くときには，積分路を z から実軸に平行に右の方へのびる半直線に選べる．このときは，積分変数を ζ から

$$\zeta = z + zt \quad (7)$$

によって変数 t に乗り換えると

$$u(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t} dt \quad (8)$$

という Laplace 積分表示を得る．ところがこの形の Laplace 積分表示は Borel 総和法 [3] の基礎をなすもので，次節で説明するような一般論を援用するとただちに

$$u(z) \sim \hat{u}(z) \quad (|\arg z| < \pi, z \rightarrow \infty) \quad (9)$$

となることがわかるのである．

2 Borel 総和法

級数 $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^{-n-1}$ の係数が

$$|a_n| \leq C n! A^n \quad (10)$$

(C, A は正定数) という不等式を満たしているとする．これは一般には収束半径 0 の発散級数であるが，ここから Borel 変換と呼ばれる級数

$$F(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} t^n \quad (11)$$

をつくると， $F(t)$ は $|t| < A^{-1}$ で収束する．Borel 総和法は $\hat{f}(z)$ を漸近展開にもつ解析函数を具体的につくる一つの方法で，次の命題に示すように $F(t)$ の解析接続と Laplace 積分を用いる．この命題の状況が成立しているとき $\hat{f}(z)$ は Borel 総和可能であるという．

命題 1 . $F(t)$ が正の実軸 $[0, \infty)$ の帯状近傍 (図 1 参照) まで正則函数として解析接続され，かつそこで高々指数的に増加する，つまり

$$|F(t)| \leq C e^{B|t|} \quad (12)$$

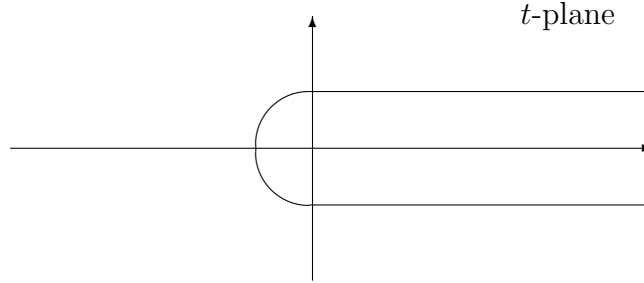


図 1: 半直線の帯状近傍

(C, B は定数) という不等式を満たすとする. このとき Laplace 積分

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-zt} dt \quad (13)$$

は次の性質をもつ.

- (i) $f(z)$ は領域 $\Gamma: |\arg z| < \pi/2, \operatorname{Re} z > B$ (図 2) において正則函数となり,
- (ii) $f(z) \sim \hat{f}(z)$ ($z \in \Gamma, z \rightarrow \infty$) という漸近展開をもつ.

注意. 実はこの場合に得られるのは下記の条件 (17) を満たすだけの単なる漸近展開ではなく, 誤差項について

$$|f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n-1}| \leq CN! A^N |z|^{-N-1} \quad (z \in \Gamma) \quad (14)$$

という形の評価を満たす強い意味の漸近展開である. このことは $F(t)$ が上に述べたような帯状近傍まで解析接続できることによる. 実際 (17) を導くだけならば $F(t)$ が正の実軸上原点も込めて C^∞ 級函数であれば十分である. なお, 漸近展開が (14) を満たせば逆に Borel 変換が帯状近傍まで解析接続できることも知られている [4].

証明. (i) の性質は $F(t)$ に関する仮定から容易にわかる. (ii) の性質を見るには次の公式に注意する.

$$\int_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-zt} dt = z^{-n-1}. \quad (15)$$

N を任意の正整数として, $F(t)$ を級数の最初の N 項と残りに分けて

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n!} t^n + \left(F(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n!} t^n \right) \quad (16)$$

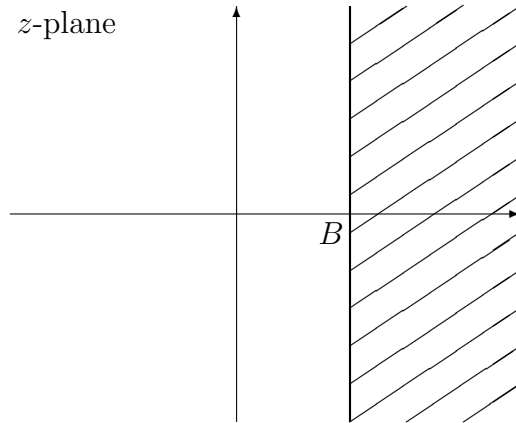


図 2: 領域 $\Gamma : |\arg z| < \pi/2, \operatorname{Re} z > B$

と書くと，最初の部分の Laplace 積分は上の公式により $\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n-1}$ となる．他方，残りの部分は $t^N \times (F(t) \text{ と同じ解析的性質をもつ})$ という形の函数になる．その Laplace 積分は ($t = zs$ という変数変換で s についての積分に書き換えて見れば容易にわかるように) $z \rightarrow \infty$ で $O(z^{-N-1})$ というようにふるまう．つまり $\hat{f}(z)$ が $f(z)$ の漸近級数であるための条件

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n-1} + O(z^{-N-1}) \quad (z \in \Gamma, z \rightarrow \infty) \quad (17)$$

を満たすことがわかる．*Q.E.D.*

さらに，上の命題では $F(t)$ が正の実軸の方向に解析接続できる場合を考えたが，偏角 θ の方向に解析接続できる場合も $f(z)$ の定義式を

$$f(z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} F(t) e^{-zt} dt \quad (18)$$

に変更すれば，領域 $\Gamma : |\arg z + \theta| < \pi/2$ で同じことが成立する．そこで， $\theta = 0$ の場合と区別するため，このようなときには「 $|\arg z + \theta| < \pi/2$ で Borel 総和可能である」ということにしよう．

従って， $F(t)$ がある一方向の帯状近傍にとどまらず（高々指数的な増大度を保ちつつ）もっと広い範囲に解析接続できるならば，Laplace 積分路を回転する（Cauchy の定理）こ

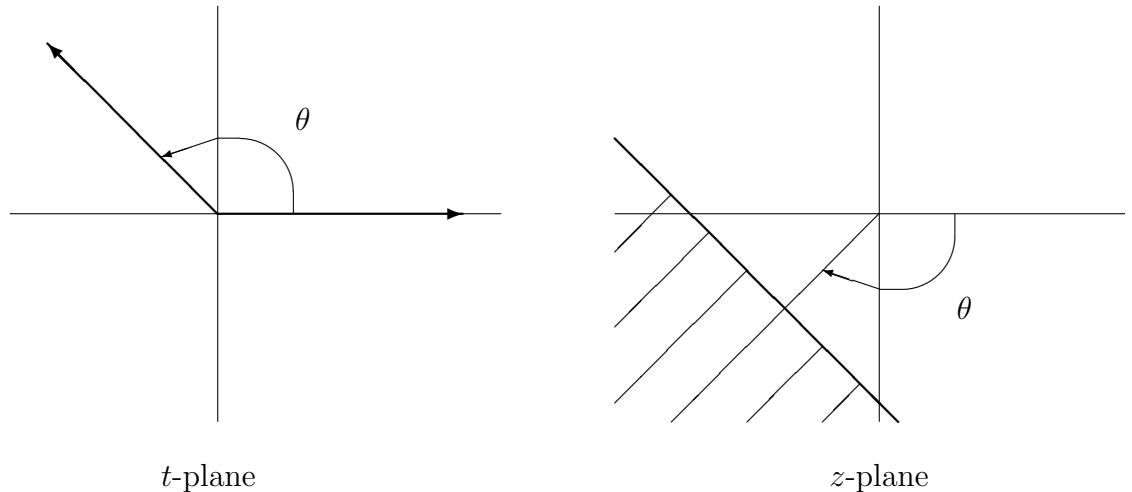


図 3: Laplace 積分の積分路を回転する

とにより, $f(t) \sim \hat{f}(t) (z \rightarrow \infty)$ という漸近展開の成立する範囲もそれに応じて広がる (図 3). 特に $F(t)$ が整函数ならば対応する $\hat{f}(t)$ は収束級数となる:

命題 2. $F(t)$ が整函数でどの方向にも高々指数的に増加することと $\hat{f}(z)$ が 0 でない収束半径をもつ収束級数になることは同値である.

証明. $F(t)$ が整函数で無限遠方でどの方向にも高々指数的に増加するならば, $f(z)$ の Laplace 積分の積分路はどの方向にも回すことができる. 従って $f(z)$ は $z = \infty$ の近傍で正則でかつ (漸近展開式が示すように) 有界となり, $z = \infty$ においても正則であることがわかる. $\hat{f}(z)$ はその $z = \infty$ における巾級数展開となるので 0 でない収束半径をもつ. 逆に, $\hat{f}(z)$ が 0 でない収束半径をもてば係数は $|a_n| \leq CA^n$ という増大度をもつ. 従って $F(t)$ を定義する t の巾級数は無限大の収束半径をもち (つまり整函数を与え), かつ

$$|F(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} C \frac{A^n}{n!} |t|^n = Ce^{A|t|} \quad (19)$$

という不等式を満たす (特に全方向に高々指数的に増加する) ことがわかる. *Q.E.D.*

裏返せば:

系． $F(t)$ が特異点をもつ限り， $\hat{f}(z)$ は収束半径 0 の発散級数である．

以上のことを前節の形式的解 (4) に適用してみる．Borel 変換をつくると

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} \quad (20)$$

となり， $t = -1$ に特異点がある．また遠方では有界だから増大度については問題ない．従って上の命題 2 の系に照らせば $\hat{u}(z)$ は発散級数のはずで，事実そうになっている．負の実軸以外の方向には Laplace 積分の積分路がとれるわけで，特に正の実軸に沿って Laplace 積分表示したものが (8) に他ならない．また，命題 1 から漸近展開 (9) が得られる．実際には Laplace 積分の積分路を回転することによりこの漸近展開の有効域をもっと広げることができる．回転角 θ は $|\theta| < \pi$ までとれるから，

$$u(z) \sim \hat{u}(z) \quad (|\arg z| < 3\pi/2, z \rightarrow \infty) \quad (21)$$

となるわけである．

それでは $\arg z$ が $\pm 3\pi/2$ を越えるとき何が起こるか？それが Stokes 現象に他ならない．

3 Stokes 現象

$u(z)$ の Laplace 積分表示の積分路を $[0, \infty e^{i\theta})$ に回転して θ が π を越えるときの様子を調べる．($-\pi$ を越えるときの解析も同様なので読者に任せる．) Laplace 積分自体は $|\arg z + \theta| < \pi/2$ で収束するから，これを z 平面で見れば，時計回りに右半平面 \rightarrow 下半平面 \rightarrow 左半平面の順に $u(z)$ を解析接続してこれから正の虚軸を越えて右半平面へ戻ろうとするところである．

さて， θ が π を越えるときには積分路はどうしても $U(t)$ の特異点 $t = -1$ にぶつかってしまうから，図のように (図 4) 特異点を迂回する積分路 C を挿入する．こうすると Laplace 積分路自体は $\theta > \pi$ に進めることができる．このとき

$$u(z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \frac{e^{-zt}}{1+t} dt + \int_C \frac{e^{-zt}}{1+t} dt \quad (22)$$

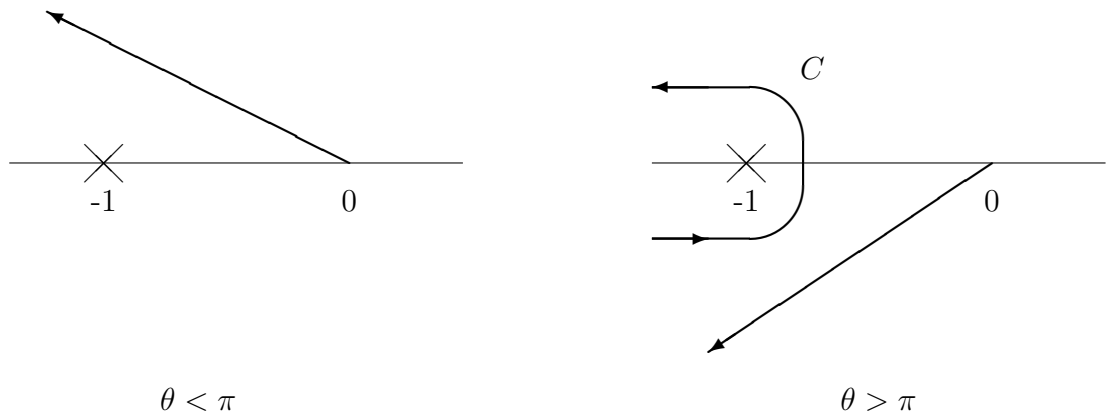


図 4: 積分路を変形して $\theta = \pi$ を乗り越える

となり，右辺第 1 項はいままでと同様の Laplace 積分として扱える．お釣りにして現れた第 2 項は積分路を $t = -1$ を一回りする積分に変形できて

$$\int_C \frac{e^{-zt}}{1+t} dt = 2\pi i e^z \quad (23)$$

となる．これがまさしく最初の節で述べた同次方程式の解であることに注意して欲しい．
こうして $\theta > \pi$ における $u(z)$ の解析接続

$$u(z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \frac{e^{-zt}}{1+t} dt + 2\pi i e^z \quad (24)$$

を得る．これは次に積分路が $t = -1$ を横切るまで（すなわち $\pi < \theta < 3\pi$ の範囲で）有効な表示である．

この積分表示 (24) から $u(z)$ の漸近挙動の変化を読みとることができる．第 1 項の Laplace 積分は出発点の $u(z)$ と同じものであるから $|\arg z + \theta| < \pi/2$ という領域で $\hat{u}(z)$ を漸近展開にもつ．他方，第 2 項の指数函数は右半平面と左半平面で漸近的性質が違う．左半平面ではこの指数函数は文字どおり指数的に小さく第 1 項の漸近展開の中に埋もれてしまう．右半平面ではむしろ指数函数が漸近挙動の主要部を占めて，第 1 項の方が見えなくなる．従って，例えば $\theta = 3\pi/2$ と選んで z 平面の上半分の様子を見れば次のようになる（図 5）．

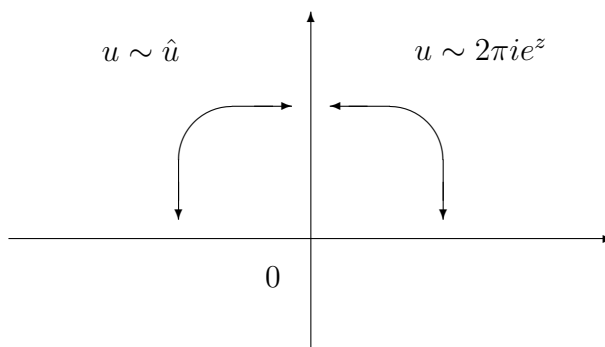


図 5: z 平面での漸近挙動 ($\theta = 3\pi/2$ として上半平面での様子を示す)

(i) 左半平面では $\hat{u}(z)$ が優勢で

$$u(z) \sim \hat{u}(z) \quad (z \rightarrow \infty). \quad (25)$$

(ii) 右半平面では指数関数が優勢で

$$u(z) \sim 2\pi i e^z \quad (z \rightarrow \infty). \quad (26)$$

これがこの場合の Stokes 現象の現れ方である。Stokes 現象の数学的定式化はいろいろあるが、いずれにせよ一般に微分方程式の解の漸近挙動がある方向を境にして急に变化する様子を表現している。こうして、少なくとも今考えている例に関しては、Stokes 現象が起きるのは Laplace 積分の積分路の回転に際して t 平面上の特異点からお釣りの項が生じるためであることがわかった。

このように Borel 総和法の視点から Stokes 現象を明快に説明できる場合は他にもいろいろある。次の節では簡単な差分方程式を同様のやり方で考えてみる。このようなアプローチをもっと徹底して広範囲の問題に適用したのが Ecalle の仕事である。

4 もう一つの例：差分版

ここでとりあげるのは，ガンマ函数に関連する差分方程式である．ガンマ函数の漸近挙動については Stirling の公式

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \frac{x^x}{e^x} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (27)$$

がよく知られているが，この漸近評価は実軸のみならず負の虚軸を除く全平面でも成り立つ．また，この漸近表示は実際には主要項を与えているに過ぎず，もっと精密な結果は次のようになる [5]．

$$\log \Gamma(z) - \log \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \frac{z^z}{e^z} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{2n(2n-1)} z^{-2n+1} \quad (|\arg z| < \pi). \quad (28)$$

ここで B_{2n} は Bernoulli 数と呼ばれる数で，次のような母函数をもつ（ただし，話の都合で，普通よく見かけるものに $t \rightarrow -t$ という変数変換を施している）．

$$\frac{t}{1 - e^{-t}} = 1 + \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{(2n)!} t^{2n}. \quad (29)$$

この2つの式の右辺に現れる係数がほとんど同じであることに注目して欲しい．なぜこうなるか？

このことを理解するためにはガンマ函数そのものよりもその対数微分（いわゆるポリガンマ函数）

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \Gamma(z), \quad \psi'(z) = \frac{d}{dz} \psi(z) \quad (30)$$

を考える方がよい．これらに対して次の積分表示が知られている [5]．

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt, \\ \psi'(z) &= \int_0^{\infty} \frac{te^{-zt}}{1 - e^{-t}} dt. \end{aligned} \quad (31)$$

$\psi(z)$ の積分表示には余分な項（これは $t = 0$ での発散を打ち消す）が現れているが， $\psi'(z)$ の積分表示は Laplace 積分そのもので，被積分函数にはまさしく Bernoulli 数の母函数 (29) が現れている．従ってすでに述べたやり方でその $z \rightarrow \infty$ における漸近展開がただちに書

き下せる．それを2回積分して積分定数を合わせれば， $\log \Gamma(z)$ の漸近展開 (28) が得られる．

漸近展開 (28) の有効域が $|\arg z| < \pi$ であることも Laplace 積分表示の積分路を $[0, \infty)$ からどこまで回転できるか見ればわかる (31) に現れている Bernoulli 数の母関数は t 平面の虚軸上にのみ特異点 ($t = 2\pi in, n = \pm 1, \pm 2, \dots$) をもつ．従って積分路の回転角 θ は $|\theta| < \pi/2$ の範囲にとれる．対応する z 平面上の利用は確かに $|\arg z| < \pi$ となる．そこを越えて解析接続するときには Euler 方程式 (1) と違って無限個の特異点を越えなければならぬ．そのため (24) に相当する接続公式のお釣りの項も無限個現れる．

なお，このあたりのことは調和振動子の量子論 (Hermite-Weber 方程式) と関係がある．詳しい議論については A. Voros の論文 [6] が参考になるだろう．Voros は Ecalle とは独立にこういう視点から非調和振動子の研究を進めて，実質的に Ecalle と同じ地点に到達した．

この例がなぜ Euler 方程式の差分版かということ， $\psi(z), \psi'(z)$ がそれぞれ次のような差分方程式を満たすからである．

$$\begin{aligned}\psi(z+1) - \psi(z) &= \frac{1}{z}, \\ \psi'(z+1) - \psi'(z) &= -\frac{1}{z^2}.\end{aligned}\tag{32}$$

$\psi(z)$ の満たす差分方程式の方が Euler 方程式の差分版らしく見えるが， $\psi(z)$ の Laplace 積分表示は上に示したように余分な項を含んでいるため，上では $\psi'(z)$ の方に注目した．しかしそのことは大した違いではない．むしろ微分方程式と差分方程式の間の違いの方が重要である．Euler 方程式の方は t 平面上の特異点は1個しか現れなかった．差分方程式の方は無限個現れる．微分と差分の間には一定の対応関係があるが，大体において差分の方が面倒くさくなる．

実は Euler 方程式の場合には方程式が線形であることが特殊事情となっている．一般に線形微分方程式の場合，このような解析で t 平面に現れる特異点は高々有限個である．しかしながら微分方程式でも非線形 (例えば Euler 方程式に u についての非線形項を入れたもの) ならば一般に無限個の特異点が現れる．そして Ecalle の理論が本当の威力を発揮するのはそのような場合である．

5 Ecalle の理論：解析的同値問題を中心に

Ecalle の理論の特徴は alien calculus と呼ぶ独特の calculus によって Borel 変換の解析性・特異性を調べることにある．そのような解析ができる函数の大変広いクラスとして Ecalle は resurgent function (再生函数と訳されることがある) と呼ぶものを用意し，さまざまな微分方程式や差分方程式の解がこのクラスの函数に属することを主張する．例えば Euler 方程式の形式的解の Borel 変換 $U(t)$ や $\psi'(z)$ の Laplace 積分表示に現れる Bernoulli 数の母函数は最も簡単なタイプの resurgent function である．一般に resurgent function とは t 平面上の多価解析函数で，ある一連の条件を満たすものを指す．この Ecalle の理論の概要を知るためには Ecalle 自身の論文よりもまず Malgrange の解説 [2] を読む方がよい．(かつそこでやめてしまうのが無難である．Ecalle の論文を読み出すと，そのあまりのものすごさに何のことやらわからなくなってくる．)

alien calculus の核心にあるのは alien derivation という抽象的微分演算である．すでに例で見てきたように，Stokes 現象の解析とは要するに Laplace 積分の積分路を回転して特異点を探索すること (Voros [6] の言葉を借りれば「レーダー法」) だった．回転角 θ の方向に特異点があればその前後 ($\theta - \epsilon$ と $\theta + \epsilon$) の Laplace 積分に差が生じる．さらに θ の方向に並ぶ特異点が無限遠点以外に集積点をもたない (実はこの条件がどの方向についても満たされることが resurgent function の定義の主な部分である) ならば，この差は各特異点からの寄与の総和として書ける (図 6)．この $\theta - \epsilon$ 方向から $\theta + \epsilon$ 方向への乗り換え (解析接続) を函数に働く「群作用」 $F \mapsto T_\theta(F)$ と考える．その対数 “log” T_θ をとったもの (いわば無限小解析接続) が alien derivation である．群要素の対数をとったのだからこれは Lie 代数の要素 (微分) となるはずで，実際 t 平面上の函数の convolution 積 (z 平面の通常の積に対応する) について確かに Leibniz の規則を満たすことが示せる．

実際にはこの “log” T_θ は特異点からの寄与の和になっていて，特異点 $t = \alpha$ ごとに alien derivation Δ_α という resurgent function に働く抽象的微分演算 $F \mapsto \Delta_\alpha F$ が定義される．特に原点に一番近い特異点では， $\Delta_\alpha F$ は $T_\theta(F) - F$ という差 (これは α を時計回りに一回りする経路で F を解析接続したときの多価性を見るもの) を t 平面上の $\alpha \rightarrow 0$ という

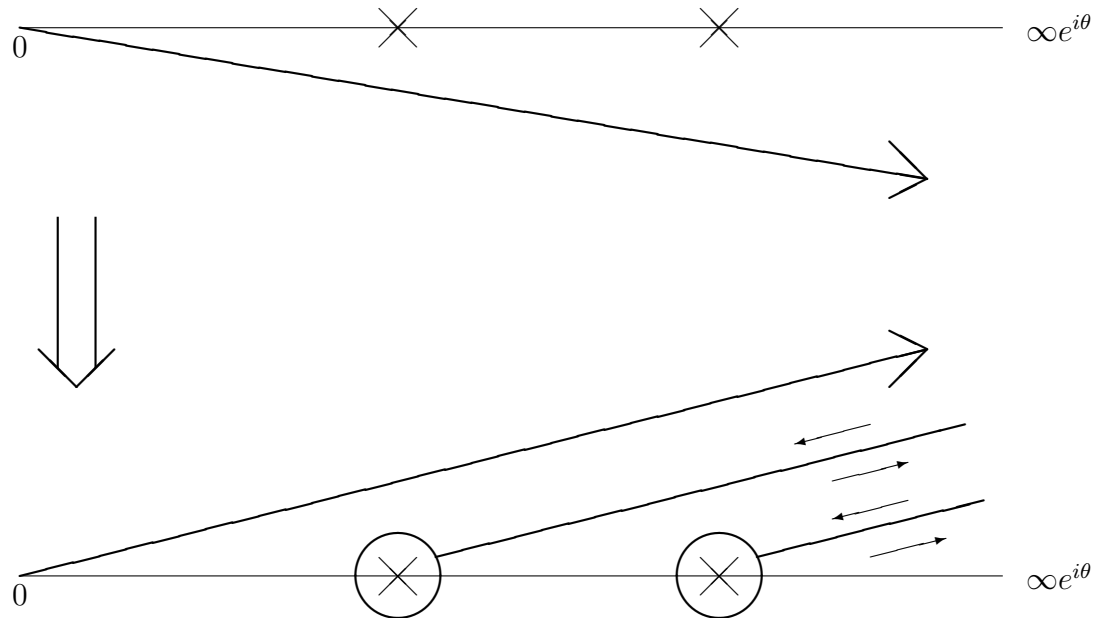


図 6: 方向角 θ の前後での差は各特異点からの寄与の和になる

平行移動で移動したものである．それ以外の特異点での $\Delta_\alpha F$ はもっと複雑なもので，原点から α にいたるいろいろな経路に沿って F を解析接続し ($T_\alpha(F)$ はそのうちの一つに過ぎない)，それらのある一定の重み (正負両方含む) で平均したものになる．

Ecalte はこのような道具を使って微分方程式・差分方程式・ベクトル場・局所微分同型などに対する「解析的同値問題」を扱っている (これが局所微分幾何学で扱う同値問題とどういう関係にあるのかはよく知らない)．その最も簡単な場合としてよく引き合いに出されるのが Euler 方程式 (1) を次のように拡張したものである．

$$\frac{dy}{dx} = y + b(z, y), \quad (33)$$

ここで $b(z, y)$ は $z = \infty, y = 0$ の近傍で定義された正則函数で，従って収束する巾級数展開

$$b(z, y) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} b_{nm} z^{-n} y^m \quad (34)$$

をもつ．この場合の問題は「この方程式に対して従属変数の変換

$$y = h(z, Y) = Y + \sum_{n \geq 0, m \geq 0} h_{nm} z^{-n} Y^m \quad (35)$$

を行うときどのような標準形が得られるか?」というものである．ただし, $h(z, Y)$ は Y について $Y = 0$ の近傍で収束する級数である．この種の問題の答は $h(z, y)$ を z について解析的なものに限るか, 形式的巾級数まで許すか, によって違ってくる．ちなみに, この種の問題の解析自体は何も Ecalle に始まることではなく, 常微分方程式論ではそれ以前からいろいろな仕事があった．それらはみな有名な Riemann 問題 (つまり, 与えられたモノドロミーデータや Stokes データに対してそれを実現する方程式を求めること) と関わっている．Ecalle はこの形式的変換と解析的変換の間の違いを彼の alien calculus の言葉で表現したのである．

もう少し立ち入って Ecalle の主張を説明する．まず, 変数変換 (35) を形式的変換にまで広げると, それらに関して方程式 (33) は高々有限個の不変量しかもたない．いいかえれば標準形として高々有限個のパラメータを含む方程式が選べる．今はこれらの不変量 (Ecalle の言葉では「代数的不変量」) には興味がないので, それらを適当に調節しておいて, 形式的変換 (区別のため $\hat{h}(z, Y)$ と書こう) によって方程式 (33) が標準形

$$\frac{dY}{dz} = Y \quad (36)$$

に移せる場合のみを考えることにする．このとき問題は「変数変換を解析的変換 ($z = \infty$ の近傍で収束するもの) に限るときにもこの標準形に移せるか?」ということである．Ecalle の結果の要点は以下の通り: 一般に (33) には無限個の「解析的不変量」 $A_n, n = -1, 1, 2, 3, \dots$ が存在し, これらが全部消えないと (33) は (36) に変換できない．これらの不変量は $\hat{h}(z, Y)$ の z に関する Borel 変換 $H(t, Y)$ が t 平面上にもつ特異点 $t = -1, 1, 2, 3, \dots$ と対応していて, 各特異点 $t = n$ における alien derivation Δ_n を用いれば

$$\Delta_n H(t, Y) = A_n Y^{n+1} \frac{\partial}{\partial Y} H(t, Y) \quad (37)$$

という関係式 (Ecalle の理論ではいろいろな解析的同値問題においてこの形の関係式を導くことが一つの中心となっている) から読みとれる．

例えば，最も簡単なのは最初に議論した方程式 (1) の場合で，このときには特異点は $t = -1$ のみに現れるので解析的不変量としては A_{-1} のみが残る．だからこそ Stokes 現象が起こるのである．実際，もしも $z = \infty$ で解析的な変換により (36) に変換できるならば (36) は Stokes 現象を起こさないからそれと解析的に同値な方程式も Stokes 現象を起こすはずがない．

一般の場合も同様に解釈できる．つまり解析的不変量が一つでも消えずに残れば Stokes 現象が起きる．解析的不変量が消えなければその点は Borel 変換の特異点となるからである．最初の方程式 (1) は線形なので特異点は $t = -1$ 1 個だけだった．Riccati 方程式 (2 次の非線形性をもつ) の場合は 2 階線形方程式との対応があるので $t = \pm 1$ の 2 個が特異点として残る (従って Borel 総和可能性が破れる方向が新たに出現する) 一般には非線形項の影響で無限個の特異点が $t = 1, 2, \dots$ に現れる． t 平面の原点に立ってレーダーのように見渡せば，特異点が見える方向は $\arg t = 0$ と $\arg t = \pi$ の 2 方向であるが， $\arg t = 0$ の方向は実は無限個の特異点が重なっている．Ecalte の alien calculus の検出機はもっと精密で，これらの特異点それぞれからの寄与を分離することができるというわけである．

Ecalte はさらに逆問題 (つまり A_n を与えてそれを実現する方程式をつくる一種の Riemann 問題) の解法も与えている．そのための道具が resurgent monomial と呼ばれる一連の特殊な resurgent function である．これらの函数は alien derivation の作用に対してなるべく簡単な規則に従うように構成されていて，ちょうど通常の微分に対する単項式のよなものである．alien derivation が alien calculus の「微分学」の基本概念をなすとすれば，これらの resurgent monomial は「級数論」や「積分学」の構成要素である．ちなみに，resurgent monomial はその昔 Riemann 問題の解を具体的に記述するために用いられた hyper-log 函数とほとんど同じものである．Riemann 問題に対してはその後コホモロジーなどによる「現代的な」アプローチが主流になったので，このような函数のことはほとんど忘れ去られていた (いる)．しかし Riemann 問題の解を単なる存在定理にとどまらず何らかの形で具体的に書き下そうとすればこういうものが必要になる．Ecalte はこの昔の手法を復活させたともいえる．

微分方程式 (33) の解析的同値問題の差分版は局所微分同型の解析的同値問題として定

式化され，やはり Ecalle の理論を説明する好例になっている．ここでも A_n というような無限個の解析的不変量が現れる．これについては Malgrange の解説 [2] に丁寧に紹介しているのでここではこれ以上の説明は省く．実は上で現れた $h(z, Y)$ 自体が $z = \infty$ における局所微分同型の例になっていて，微分方程式の問題と局所微分同型の問題は分かちがたく結びついている．

参考文献

- [1] 大久保謙二郎・河野實彦, 漸近展開 (教育出版, 1976) .
- [2] B. Malgrange, Introduction aux travaux de J. Ecalle, L'Enseignement Math. 31 (1985), 261-282.
J. Ecalle, Cinq applications des fonctions résurgentes, Publ. Math. Orsay (1984); Les fonctions résurgentes, I-III, Publ. Math. Orsay (1981-85); The acceleration operators and their applications to differential equations, quasianalytic functions, and the constructive proof of Dulac's conjecture, in: Proceeding of the International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990, Springer-Verlag, 1991.
- [3] 森口繁一他, 数学公式 II (岩波全書, 1983), 第 4 章 .
M. Reed and B. Simon, Method of modern mathematical physics (Academic Press, 1978).
- [4] A.D. Sokal, An improvement of Watson's theorem on Borel summability, J. Math. Phys. 21 (1980), 261-263.
- [5] 数学辞典, 第 3 版 (岩波書店, 1985), 項目 3 8 6 ならびに付録公式 1 7 .
F.W.J. Olver, Asymptotics and special functions (Academic Press, 1974).
- [6] A. Voros, The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A, 39 (1983), 211-338.