

# 非線形波動の変調と Whitham 方程式

京都大学総合人間学部基礎科学科 高崎金久 (Kanehisa Takasaki)

## 1 はじめに

非線形振動論における Bogoliubov-Krilov-Mitropol'ski の平均化法の非線形波動への拡張として、Whitham の平均化法 [1] と呼ばれるものが知られている。これはもともと分散性非線形波動の変調現象を一般的に扱うために開発されたものであるが、KdV 方程式などの場合には (多重) 周期解が (超) 楕円函数で厳密に与えられるため、その変調が Riemann 面の幾何学の言葉で記述される、など数学的に思いがけない広がりを見せる。また、戸田格子などの格子上的非線形波動や、Painlevé 型方程式の解の漸近挙動の解析にも応用されている。

Whitham の平均化法は非線形波動から搬送波の速い振動を平均操作によって消去して、搬送波のパラメータの緩やかな時空変化を取り出すものである。類似の考え方は「断熱近似」として非線形波動のみならず物理学全般に広く用いられている。たとえば、量子力学の Born-Oppenheimer 近似もその一種で、その数学的な取り扱いが Whitham 平均化法とほとんど同じである。これらの手法に共通する「速いモードを消去して遅いモードに繰り込む」という考え方は繰り込み群にも通じるものがある。

以下では、繰り込み群との関連を期待しつつ、KdV 方程式を主な例として、Whitham の平均化法を解説する。

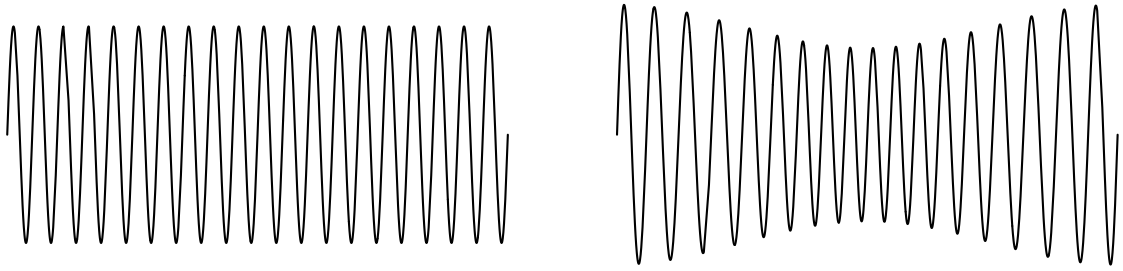


図 1: 周期的な波動（左）とその変調（右）

## 2 変調された波動

### 2.1 変調とは？

Whitham の平均化法が扱うのは、周期的な波が波長よりも大きなスケールでゆっくり変調する場合である。周期的な波は進行波

$$u = f(\kappa x + \omega t \mid A, B, \dots) \quad (1)$$

の形で書ける。ここで  $\kappa, \omega, A, B, \dots$  は定数（あるいはパラメータ）である。これを変調した波は小さい数  $\epsilon > 0$  で rescale された時空変数

$$X = \epsilon x, \quad T = \epsilon t \quad (2)$$

を通じて周期解のパラメータ  $\kappa, \omega, A, B, \dots$  を

$$\kappa = \kappa(X, T), \quad \omega = \omega(X, T), \quad A = A(X, T), \dots \quad (3)$$

というように時空的に変化させたものである。実際、 $(x, t)$  と  $(X, T)$  がこのような関係で結ばれていれば、 $(x, t)$  における周期解の波長・振動数の時空スケール  $\sim O(1)$  は  $(X, T)$  では微視的スケール  $\sim O(\epsilon)$  に見える。この意味で  $(x, t)$  を速い変数 (fast variable)、 $(X, T)$  を遅い変数 (slow variable) と呼ぶ。

変調された周期解が漸近的に（すなわち  $\epsilon \rightarrow 0$  において近似的に）もとの方程式の解であるためには  $\kappa(X, T), \omega(X, T), A(X, T), B(X, T), \dots$  は任意ではあり得ない。Whitham 平均法を適用すると、これらの変調を記述する関数は  $(X, T)$  に関してある微分方程式（変調方程式あるいは Whitham 方程式）に従わなければならないことがわかる。後の節では KdV 方程式を例にしてこのことを議論する。

## 2.2 分散性衝撃波

ところで、このように周期解が変調された状況が自然に、かつ劇的に現れる例として、分散性衝撃波がある。これは分散性をもつ非線形波動方程式に広く見られる現象であるが、ここでは分散項係数が小さい小さい KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + \epsilon^2 u_{xxx} = 0 \quad (4)$$

の場合を例にして、この現象を簡単に紹介する。実際、分散性衝撃波の本格的な研究は 70 年代に Gurevich と Pitaevski がこのような KdV 方程式で行った研究に始まる [2]。ここでは、計算機を用いた数値的方法と並んで、Whitham の平均法も用いられたのである。(Gurevich と Pitaevski の研究の紹介は Novikov 達の有名な教科書 [3] にある。また、分散性衝撃波の研究のその後の進展については Lax 達のレビュー [4] を参照のこと。)

なお、いささか紛らわしいのだが、上の形の KdV 方程式で変調を考えるとときには実は  $(x, t)$  が遅い変数である。

比較のために、上の KdV 方程式の分散項  $u_{xxx}$  を散逸項  $-u_{xx}$  で置き換えて得られる方程式

$$u_t + 6uu_x - \epsilon^2 u_{xx} = 0 \quad (5)$$

を考える (普通は非線形項の前に 6 という定数を付けないが、これは本質的な違いではない。) これは Burgers 方程式と呼ばれるものである。Burgers 方程式では衝撃波面の形成という現象がよく知られている。これは方程式を厳密に解くことでも説明できるが、状況を定性的に理解するには、むしろ無分散極限  $\epsilon \rightarrow 0$  を考える方がよい。

形式的に  $\epsilon = 0$  として得られる方程式

$$u_t + 6uu_x = 0 \quad (6)$$

(KdV 方程式・Burgers 方程式のいずれから出発しても同じ方程式が得られることに注意) は Hopf 方程式とも呼ばれるもので、 $t = 0$  において  $u = f(x)$  という初期値を与えると、 $t \neq 0$  での解は

$$u = f(x - 6ut) \quad (7)$$

によって決まる。右辺にも  $u$  が現れるので、これは解を定める関数方程式で、 $t$  が十分小さいときには陰関数定理によって一価な解の存在が保証される。しかし  $t$  が大きくなる

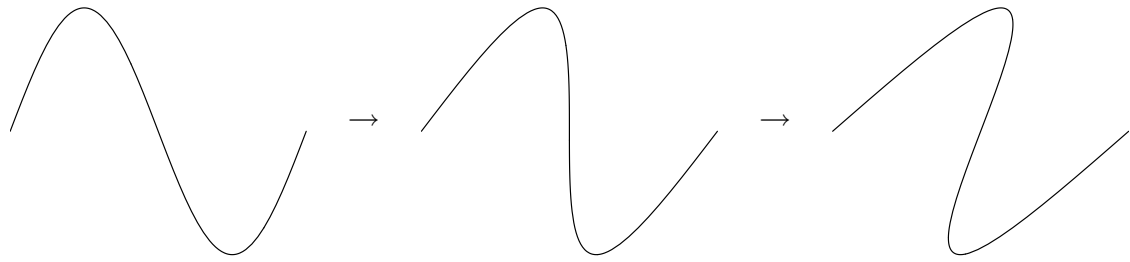


図 2:  $\epsilon = 0$  の場合の多価な解への移行

と、解は一般には多価性を生じる．たとえば  $f(x) = \sin(x)$  というような初期波形から出発すると、中央付近のグラフが傾斜している部分の勾配は時間とともに急峻になり、ある時刻  $t = t_0$  を境にしてオーバーハングした状態（つまり多価函数）に転じる（図 2）．物理的にはこれは無意味なので、通常は  $t > t_0$  の解は適当な条件を満たす不連続函数として解釈する．

$\epsilon \neq 0$  の Burgers 方程式では、不連続面の代わりに、幅が  $O(\epsilon)$  程度の急激な勾配をもつ衝撃波面が形成されることがわかる．要するに、衝撃波形成直前までの過程では非線形項  $uu_x$  が中心的な役割を演じるが、不連続面を避けて衝撃波面の形成するには散逸項  $u_{xx}$  が欠かせないのである．

KdV 方程式でも衝撃波面の形成直前までは Burgers 方程式の場合とよく似ているが、その後の状況はかなり異なる．大きな特徴は単一の衝撃波面の代わりに空間的振動領域が現れることである．これが分散性衝撃波である．振動領域の先端（wave front）は Burgers 方程式の衝撃波面に相当する部分で、その後方に振動領域が続く．振動領域は全体として先端部とともにほぼ一定の速度で移動するが、他方、末端は新たな振動領域を生じながら逆方向に延びて行く（図 3）．

Gurevich と Pitaevski が明らかにしたのは、この分散性衝撃波の空間的振動領域が変調された楕円函数解（cnoidal 波）として十分良く近似できる、ということである．Gurevich と Pitaevski は解析を行う都合上初期波形が階段函数の場合を特に詳しく調べているが、楕円函数解の変調という描像はそれ以外の場合にも当てはまる．

ちなみに、長時間が経過した状況（階段函数の初期波形の場合には解析的に調べることができる）を見ると、振動部分の一つ一つの山が実はソリトンに他ならないことがはっきりする．その意味で、分散性衝撃波を初めとする周期的非線形波動の変調現象を「ソリト

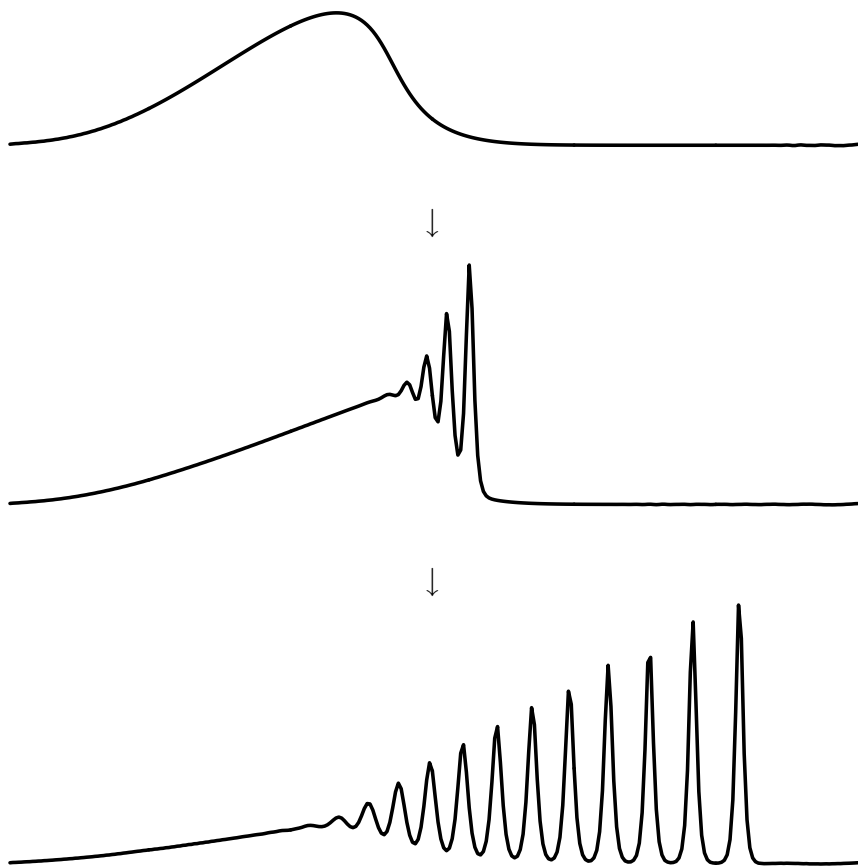


図 3: KdV 方程式における分散性衝撃波の発生

ン格子の動力学」と考えることもできる。

### 3 KdV 方程式の楕円函数解に対する変調方程式

#### 3.1 楕円函数解

まず KdV 方程式の楕円函数解自体について少し立ち入って説明しておきたい。

KdV 方程式の楕円函数解は進行波解

$$u = u_0(\epsilon^{-1}(\kappa x + \omega t) + \phi | A, B, \dots) \quad (8)$$

として得られる。\$u\_0(\xi | A, B, \dots)\$ は楕円函数，\$A, B, \dots\$ はそのパラメータ（たとえば複素周期）である。この場合，まだ変調はしていないが，

$$\xi = \epsilon^{-1}(\kappa x + \omega t) \quad (9)$$

が速い変数の役割を演じることに注意されたい。

この式を KdV 方程式に代入すると，\$u\_0(\xi)\$ に対する常微分方程式

$$\omega u_{0,\xi} - 6\kappa u_0 u_{0,\xi} + \kappa^3 u_{0,\xi\xi\xi} = 0 \quad (10)$$

が得られる。これを積分すると

$$\omega u_0 - 3\kappa u_0^2 + \kappa^3 u_{0,\xi\xi} + \frac{A}{2} = 0$$

となる（\$A\$ は積分定数）。さらに \$u\_{0,\xi}\$ を掛けてもう一度積分すると

$$\frac{\omega}{2} u_0^2 - \kappa u_0^3 + \frac{\kappa^3}{2} u_{0,\xi}^2 + \frac{A}{2} u_0 + \frac{B}{2} = 0$$

（\$B\$ も積分定数）。これを

$$\begin{aligned} \left(\frac{du_0}{d\xi}\right)^2 &= \frac{2}{\kappa^2} u_0^3 - \frac{\omega}{\kappa^2} u_0^2 - \frac{A}{\kappa^3} u_0 - \frac{B}{\kappa^3} \\ &= \frac{2}{\kappa^3} (u_0 - r_1)(u_0 - r_2)(u_0 - r_3) \end{aligned} \quad (11)$$

と書き直すと（ただし \$r\_3 < r\_2 < r\_1\$ とする），これは3次のポテンシャルをもつ1次元の Hamilton 力学系とみなすことができる（図4）。区間 \$r\_3 \leq u\_0 \leq r\_2\$ の中で振動する解が KdV 方程式の周期解に相当する。この解は

$$k = \frac{r_2 - r_3}{r_1 - r_3} \quad (12)$$

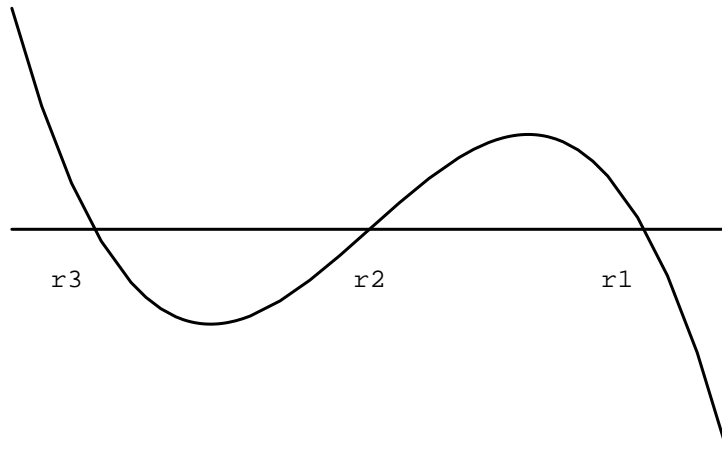


図 4: 楕円函数解を与える 3 次のポテンシャル

を母数とする Jacobi の楕円函数によって

$$\begin{aligned}
 u_0 &= r_3 + (r_2 - r_3) \operatorname{sn}^2 \left( \frac{\sqrt{r_1 - r_3}}{\sqrt{2\kappa}} \xi \right) \\
 &= r_2 + (r_3 - r_2) \operatorname{cn}^2 \left( \frac{\sqrt{r_1 - r_3}}{\sqrt{2\kappa}} \xi \right) \\
 &= r_1 + (r_3 - r_1) \operatorname{dn}^2 \left( \frac{\sqrt{r_1 - r_3}}{\sqrt{2\kappa}} \xi \right)
 \end{aligned} \tag{13}$$

と書ける。KdV 方程式の楕円函数解が「cnoidal 波」と呼ばれるのは、このように cn 函数が現れることによる。

ちなみに、この解を次のようにテータ函数で表現することもできる：

$$u_0 = C - 2\epsilon^2 \partial_x^2 \log \theta \left( \epsilon^{-1}(U_1 x + U_2 t) + \phi \mid \tau \right), \tag{14}$$

ここで  $\theta$  は  $\theta_3$  (実際には Jacobi の 4 つのテータ函数のどれでも等価な解が得られる) である。  $\tau$  は楕円函数の基本周期の比  $\omega_3/\omega_1$  であり、  $U_1, U_2$  は楕円曲線

$$\mu^2 = (\lambda - r_1)(\lambda - r_2)(\lambda - r_3) \tag{15}$$

の上にも決まるある有理型微分  $dp, dq$  の周期積分で、定数因子を除いては本質的に  $\kappa, \omega$  に等しい：

$$U_1 = \text{constant} \cdot \kappa = \oint_{\beta} dp, \quad U_2 = \text{constant} \cdot \kappa = \oint_{\beta} dq. \tag{16}$$

また  $C$  もこれらの幾何学的データに付随して決まるある量である．解をこのような形に表現することは KdV 方程式の他の解（たとえば超楕円函数解）を考える上でも重要であるが，ここではこれ以上は立ち入らない．

### 3.2 非線形 WKB 法に基づく変調解

これから，上で説明した楕円函数解の変調を考えるわけだが，実はこれにはいろいろな説明の仕方がある．ここでは Dobrokhotov と Maslov [7] による「非線形 WKB 法」の枠組みで変調解を求めて行く．

非線形 WKB 法では次のような漸近形で変調解を求める：

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots, \\ u_0 &= u_0(\epsilon^{-1} S(x, t) \mid A(x, t), B(x, t), \dots), \\ u_n &= u_n(\epsilon^{-1} S(x, t) \mid x, t) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad \dots \end{aligned} \quad (17)$$

各項はそれぞれ次のようなものである．

1.  $S(x, t)$  は適当な「位相函数」(これが「非線形 WKB 法」という名称を説明する)．  
1
2.  $u_0(\xi \mid A, B, \dots)$  は楕円函数解に現れたものと同じ函数． $\xi$  についての周期は  $(x, t)$  によらず一定とする（テータ函数による表現から，この要請は実際に満たされていることがわかる）．
3.  $u_1(\xi, x, t), u_2(\xi, x, t), \dots$  も「速い」変数  $\xi = \epsilon^{-1} S(x, t)$  と「遅い」変数  $x, t$  の函数であるが，これらが  $\xi$  については  $u_0$  と同じ値の周期をもつことを要請する．

最後の要請は  $u_1, u_2, \dots$  を決めて行く際に永年項 (secular term) が生じないためのものである． $u_0$  については， $A, B, \dots$  もまた  $(x, t)$  の函数として遅いスケールで変化することに注意されたい．これは確かに物理で言う断熱近似の一種である．

---

<sup>1</sup> 正確に言えば，位相函数にも  $S(x, t) + \epsilon \phi(x, t) + \dots$  という高次項を入れておくべきであるが，以下で考えるような  $u_1$  までを考える近似のオーダーでは  $\phi, \dots$  を決めることができないので，ここではこれらの項は無視する．実際に分散性衝撃波などを楕円函数解の変調として近似するときにはこのような項を適当に入れておかないと位相に有限のずれが生じることが知られている．これらの項の詳しい取り扱いは Dobrokhotov と Maslov の論文を参照されたい．



### 3.3 平均化法による変調方程式の導出

上の設定のもとで変調方程式を導くには以下のような手順を踏む。

まず，上のような変調解の漸近的表示を KdV 方程式に代入して  $\epsilon$  の巾でまとめると

$$S_t u_{0,\xi} + 6S_x u_0 u_{0,\xi} + S_x^3 u_{0,\xi\xi\xi} = 0, \quad (18)$$

$$\mathcal{L}u_n = F_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (19)$$

という方程式系が得られる．ここで  $\mathcal{L}$  は方程式 (18) を  $u_0$  の周りで線形化した線形微分作用素

$$\mathcal{L} = S_t \partial_\xi - 6S_x (u_0 \partial_\xi + u_{0,\xi}) + S_x^3 \partial_\xi^3 \quad (20)$$

である．右辺には  $u_0$  とその導関数が含まれる：

$$F_1 = u_{0,t} - 6u_0 u_{0,x} + 3S_x S_{xx} u_{0,\xi\xi} + 3S_x^2 u_{0,x\xi\xi}, \quad \dots \quad (21)$$

最初の方程式 (18) を考える．これは， $S$  が

$$S_x = \kappa, \quad S_t = \omega \quad (22)$$

を満たせば， $u_0$  の満たす常微分方程式から従う．もちろん  $S$  が存在するためには  $\kappa = \kappa(x, t)$  と  $\omega = \omega(x, t)$  が積分可能条件

$$\kappa_t = \omega_x \quad (23)$$

を満たしていなければならない． $\kappa$  と  $\omega$  は楕円曲線から決まる量なので，これはこの後で導く変調方程式に対する付加的要請になるが，結果として， $\kappa$  と  $\omega$  に対するこの積分可能条件は変調方程式から従う，ということがわかる．

次に，方程式 (19) が前述のような周期解をもつ（これは永年項を生じないということの言い替えである）ための条件（いわゆる「可解性条件」）を考える．一般論によれば，可解性条件は方程式の右辺  $F_1$  が  $\mathcal{L}$  の随伴作用素

$$\mathcal{L}^* = -S_t \partial_\xi + 6S_x u_0 \partial_\xi - S_x^3 \partial_\xi^3 \quad (24)$$

に対する斉次方程式

$$\mathcal{L}^* Q = 0 \quad (25)$$

の任意の解 (ただし  $u_1$  に対して要請しているのと同じ周期を  $\xi$  に関して持つ)  $Q$  と直交することである :

$$\oint Q F_1 d\xi = 0 \quad (26)$$

ただし  $\oint$  は 1 周期にわたる積分を意味するものとする . このような  $Q$  として  $u_0$  の微分多項式

$$Q = 1, u_0, u_0^2 - \frac{1}{3} S_x^2 u_{0,\xi\xi}, \dots \quad (27)$$

などがすぐに見つかる (実は, KdV 方程式の場合, この後すぐに述べるように,  $Q$  として無限個の系列が存在する.) 対応する可解性条件はいずれも遅い変数に関する保存則の形に書き直せる (これは KdV 方程式に限らずかなり一般的に言えることであるらしい. Dobrokhotov と Maslov の論文 [7] を参照されたい.) たとえば  $Q = 1, u_0$  に対してはそれぞれ

$$Q = 1: \quad \partial_t \oint u_0 d\xi - \partial_x \oint 3u_0^2 d\xi = 0, \quad (28)$$

$$Q = u_0: \quad \partial_t \oint \frac{1}{2} u_0^2 d\xi - \partial_x \oint \left( 2u_0^3 + \frac{3}{2} S_x^2 u_{0,\xi}^2 \right) d\xi = 0 \quad (29)$$

という方程式が得られる. これらが変調方程式に他ならない.

実際には, KdV 方程式 (および他のソリトン方程式) の場合, これらの可解性条件は元の方程式に存在する保存則を速い変数で平均化したものに他ならないことがわかる. よく知られているように, これらの方程式には無限個の局所的保存則

$$\partial_t Q_n = \partial_x R_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (30)$$

が存在する. これらを速い変数で平均化したもの

$$\partial_t \langle Q_n \rangle = \partial_x \langle R_n \rangle \quad (31)$$

から前述のような可解性条件が再現される (Dubrovin と Novikov の総説 [5] はこのような平均化の理論のさまざまな拡張を紹介している.)

## 4 変調方程式の代数幾何学的解釈

### 4.1 楕円曲線の運動方程式としての変調方程式

$u_0$  の楕円函数表示を用いれば, 平均化を行う積分は完全楕円積分, すなわち楕円曲線 (15) 上の有理型微分の周期積分, に書き直せる. 従ってこれらの方程式は完全楕円積分

と  $S_x, S_t$  を含む保存則型微分方程式系となる． $S_x, S_t$  と  $\kappa, \omega$  の間に置いた関係式 (22) を思い出して  $S_x, S_t$  を  $\kappa = \kappa(x, t), \omega = \omega(x, t)$  に戻せば (これらも楕円曲線の言葉で特徴付けられるのだった), 変調方程式は楕円曲線に付随してきまる量だけで書けることになる (Whitham 方程式というときはそういう形に書き直したものを指すことも多い.)

ここで楕円曲線 (15) は分岐点  $r_j$  を指定すればきまる, ということに注意する．今の場合, 分岐点も時空変数  $(x, t)$  に依存して変化する量  $r_j = r_j(x, t)$  である．上で注意したように, 変調方程式に現れる量はすべてこの分岐点の (周期積分を含むきわめて複雑な) 函数であるから, 結局, 変調方程式は分岐点の位置を未知関数とする微分方程式とみなすことができる．

こうして得られる分岐点の運動方程式は, 楕円曲線が時空変数  $(x, t)$  に関して変形する様子を記述する方程式, つまり「楕円曲線の運動方程式」を与える．変調の動力学はこうして, 原理的には, 楕円曲線の動力学という幾何学的な枠組みでとらえられることになる．もっとも, 完全楕円積分などを用いて書き下される前述のような変調方程式は, 解析的に非常に複雑で, このような幾何学的な描像もほとんど見えてこない代物である．この難点は, 次に紹介する Flaschka, Forest, McLaughlin の仕事 [6] によって解消される．

## 4.2 Flaschka-Forest-McLaughlin 形式

Flaschka 達は, 超楕円函数解の場合も含めて, 変調方程式を簡潔で幾何学的意味のはっきりした形 (Flaschka-Forest-McLaughlin 形式) にまとめ上げた．以下にその要点を紹介する．

1. まず KdV 方程式の超楕円函数解であるが, これはテータ函数による楕円函数解の表示をそのまま拡張する形で得られる．ただし, テータ函数や有理型微分などは一般に

$$\mu^2 = R(\lambda) = (\lambda - r_1)(\lambda - r_2) \cdots (\lambda - r_{2g+1}) \quad (32)$$

という形の超楕円曲線から構成されるものである．

2. Flaschka-Forest-McLaughlin 形式の変調方程式の構成要素は楕円函数解の場合の有理型微分  $dp, dq$  の対応物である．これは次のような形で与えられる：

$$dp = \frac{P(\lambda)d\lambda}{\mu}, \quad dq = \frac{Q(\lambda)d\lambda}{\mu}. \quad (33)$$

ここで  $P(\lambda), Q(\lambda)$  はそれぞれ  $\lambda$  の  $g, g+1$  次多項式で,  $g$  次以上の項はある特定の形をもつ. さらに, これらは超楕円曲線の Riemann 面上のサイクル ( $g$  個の  $\alpha$  サイクル  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  と  $\beta$  サイクル  $\beta_1, \dots, \beta_g$  を指定しておく) に対して

$$\oint_{\alpha_j} dp = \oint_{\beta_j} dq = 0 \quad (j = 1, \dots, g) \quad (34)$$

という条件を満たすことを要求されていて, それによって一意的に定まる. このとき残る周期積分により

$$\kappa_j = \oint_{\beta_j} dp, \quad \omega_j = \oint_{\beta_j} dq \quad (35)$$

という量が決まるが, 実はこれが楕円函数解の場合の  $\kappa, \omega$  (あるいは  $U_1, U_2$ ) に相当する. 種数  $g$  の超楕円函数解 ( $g$  次元の多重準周期性をもつ) は  $g$  変数のテータ函数で書かれているが, その中に  $(x, t)$  はこれらを成分とする  $g$  次元ベクトル  $\kappa, \omega$  の 1 次結合  $\kappa x + \omega t$  として現れる.

### 3. 変調方程式は $dp, dq$ を用いて

$$\partial_t dq = \partial_x dp \quad (36)$$

という簡潔な形にまとめられる. これが Flaschka-Forest-McLaughlin の導いた変調方程式の表現である. なおここで,  $\partial_t, \partial_x$  は「 $\lambda$  を一定にして楕円曲線のパラメータを微分する」と解釈する ( $dp, dq$  を定める多項式  $P(\lambda), Q(\lambda)$  が Riemann 面上の周期積分を含む複雑なものなので, この方程式の実体は見かけほど簡単ではない.)

### 4. この方程式から, 特に, 分岐点 $r_j = r_j(x, t)$ に対する方程式

$$\partial_t r_j = v_j \partial_x r_j \quad (j = 1, \dots, g) \quad (37)$$

が導かれる. ここで  $v_j$  は

$$v_j = \left. \frac{dq}{dp} \right|_{\lambda=r_j} = \frac{Q(r_j)}{P(r_j)} \quad (38)$$

で定義される量で,  $r_1, \dots, r_g$  の複雑な函数 (周期積分などの組み合わせ) になる. 特に,  $g = 1$  (楕円曲線) の場合には前節で紹介したような平均法により導かれる方程式を再現する. 分散性衝撃波の性質はこの分岐点の運動によって, 少なくとも定性的には, かなりよく説明できることがわかる.

## 5. 上の方程式から特に

$$\partial_t \kappa_j = \partial_x \omega_j \quad (39)$$

という関係式が従う．従って

$$\partial_x S_j = \kappa_j, \quad \partial_t S_j = \omega_j \quad (40)$$

という函数  $S_j = S_j(x, t)$  が存在することがわかる．これが非線形 WKB 法で用いられた位相函数に他ならない． $g = 1$  の場合の非線形 WKB 法の（最低次の）漸近解の構成はようやくこれで簡潔する（実際には，すでに触れたように，さらに有限の位相のずれの項  $\phi = \phi(x, t)$  を考慮に入れないと話は完全ではない．）

このように，Flaschka-Forest-McLaughlin 形式は Whitham 流の変調方程式に潜んでいた代数幾何学的な意味を見事に説明している．特にその形の普遍性に注目されたい．実際，この形の方程式は KdV 方程式以外のソリトン方程式の変調理論 [8] や Painlevé 型方程式の漸近理論 [9, 10]（これも楕円函数などの変調と考えることができる）にも見いだされている．また，変調理論の枠から離れてそれ自体の意味や応用を探る研究も行われている [11, 12]．

## 5 繰り込み群？

最後に繰り込み群との関連について述べるべきであるが，これは実ははっきりしない．平均法は速い自由度を積分して遅い自由度の運動パラメータに繰り込むという操作であるから思想的には繰り込み群とよく似ている．今の場合，速い自由度は楕円函数解などの搬送波成分で，それが時空の微視的スケールに分布している．そこに遅い自由度として  $\kappa, \omega, A, B, \dots$  などのパラメータが入り込んでいて，巨視的スケールの時空変数の函数として緩やかに変化している．一般に，そのような遅い自由度の（広い意味での）動力学を規定する運動方程式を（このように呼ぶことの正当性に議論があることは承知の上で）「繰り込み群方程式」と呼ぶことにすれば，

$$\text{変調 (Whitham) 方程式} \stackrel{?}{=} \text{繰り込み群方程式}$$

という図式が成り立ちそうにも思われる．現段階ではこれは単なるアナロジーの域を出ない．

興味深いことに、このような Whitham 方程式やその仲間が、まったく別の文脈で登場する「本物の」繰り込み群方程式と同定される場合がある。そのような例として

- 2次元量子重力（ランダム三角形分割）
- 位相的共形場理論・重力理論
- 4次元  $N = 2$  超対称ゲージ理論の低エネルギー有効理論（Seiberg-Witten 理論）

などが掲げられる。（最初の2つやそれに関連する話題については Dubrovin のレビュー [12] に詳しい。最後の話題については最近のいくつかのレビュー [13, 14, 15, 16] とその引用文献を参照されたい。）これは「繰り込み群方程式の普遍性」を意味するものなのかも知れない（Carroll のレビュー [17] はこの問題を考える上で参考になりそうな材料を提供している）。

## 6 まとめ

以上、Whitham 方程式の古典的題材である KdV 方程式を例に選んで、Whitham の平均法の背景、計算法、代数幾何学的意味、などを解説してきた。

変調方程式を導くにはいくつかのやり方があるが（超）楕円函数解の変調の場合、変調方程式は最終的には背後の（超）楕円曲線の動力学を記述する微分方程式として理解できる。そのことをきわめて明快な形でまとめ上げたのが Flaschka-Forest-McLaughlin 形式である。

そのような理論的・数学的意味を探ることもさることながら、変調方程式を実際の問題、たとえば分散性衝撃波の解釈に適用してみることも依然興味ある問題である。これに関する Gurevich と Pitaevski の古典的な仕事や Lax 達によるその後の研究などについては省略した。

Whitham 方程式は繰り込み群と思想的には非常に近い関係にある。その意味で、Whitham 方程式を一種の繰り込み群方程式と解釈することも類推としては有意義であるが、「厳密な」意味でそのような解釈が許されるのかどうかはまだよくわからない。まったく異なるところから同じ（Whitham 型方程式の）形をもつ方程式が出てくることは、このような（一般化された）繰り込み群方程式自体が何らかの普遍性をもつことを示唆しているように思われる。

## 参考文献

- [1] G.B. Whitham, A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian, *J. Fluid Mech.* **22** (1965), 273-283; Non-linear dispersive waves, *Proc. R. Soc. London* **A139** (1965), 283-291.
- [2] A.V. Gurevich and L.P. Pitaevski, Non-stationary structure of a collisionless shock wave, *Soviet Phys. JETP* **38** (1974), 291-297; Decay of initial discontinuity in the Korteweg-de Vries, *JETP Letters* **17** (1973), 193-195.
- [3] S.P. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevski and V.E. Zakharov, *Theory of Solitons* (Plenum, 1984).
- [4] P.D. Lax, C.D. Levermore and S. Venakides, The generation and propagation of oscillations in dispersive initial value problems and their limiting behavior, in: *Important Developments in Soliton Theory*, A.S. Fokas and V.E. Zakharov (eds.), Series in Nonlinear Dynamics (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [5] B.A. Dubrovin and S.P. Novikov, Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices, *Russian Math. Surveys* 44:6 (1989), 35-124.
- [6] H. Flaschka, M.G. Forest and D.W. McLaughlin, Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg-de Vries equation, *Comm. Pure. Appl. Math.* **33** (1980), 739-784.
- [7] S.Yu. Dobrokhotov and V.P. Maslov, Finite-zone, almost-periodic solutions in WKB approximations, *J. Soviet Math.* **16** (1981), 1433-1486.
- [8] I.M. Krichever, Method of averaging for two-dimensional “integrable” equations, *Func. Anal. Appl.* **22** (1988), 200-213; Spectral theory of two-dimensional periodic operators and its applications, *Russ. Math. Surveys* **44:2** (1989), 145-225.
- [9] S.P. Novikov, Quantization of finite-gap potentials and nonlinear quasiclassical approximation in nonperturbative string theory, *Funct. Anal. Appl.* **24** (1990), 296-306.

- [10] F. Fucito, A. Gamba, M. Martellini and O. Ragnisco, Nonlinear WKB analysis of the string equation, *Int. J. Mod. Phys.* **B6** (1992), 2123-2148.
- [11] I.M. Krichever, The  $\tau$ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories, *Comm. Pure. Appl. Math.* **47** (1994), 437-475.
- [12] B.A. Dubrovin, Geometry of 2D topological field theories, *Lecture Notes in Math.* **1620**, pp. 120-348 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996).
- [13] E. D'Hoker and D.H. Phong, Seiberg-Witten theory and integrable systems, hep-th/9903068.
- [14] A. Marshakov, Seiberg-Witten curves and integrable systems, hep-th/9903252.
- [15] M. Mariño, The use of Whitham hierarchies, hep-th/9905053.
- [16] K. Takasaki, Whitham Deformations and Tau Functions in  $N = 2$  Supersymmetric Gauge Theories, hep-th/9905224.
- [17] R. Carroll, Remarks on Whitham and RG, hep-th/9712110; Some remarks on Whitham equation, hep-th/980486; Various aspects of Whitham times, hep-th/9905010.