

重力場のツイスター理論と可積分系

近畿大学理工学部 高崎金久

第 16 回特異点研究会

名古屋大学 2015 年 1 月 10 日/11 日

目次

- I. 4 次元時空の反自己双対性の諸相
- II. ツイスター空間の構成と逆構成
- III. 次元簡約と可積分系

参考文献

1. L.J. Mason & N.M.J. Woodhouse, *Integrability, self-duality, and twistor theory*, Clarendon Press, 1996.
2. M. Dunajski, *Solitons, instantons and twistors*, Oxford Graduate Texts in Math. 19, 2010.
3. 高崎金久, ツイスターの世界, 共立出版 2005.
4. M Dunajski et al, arXiv:math.DG/0004031, nlin/0204043v2, math/0301171, math/0303181, nlin.SI/0503030, etc...
5. K. Takasaki, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 22 (1986), 949-990; J. Math. Phys. 30 (1989), 1515-1521; J. Math. Phys. 31 (1990), 1877-1888; Phys. Lett. B285 (1992), 187-190; J. Geom. Phys. 14 (1994), 111-120.

I. 4次元時空の反自己双対性の諸相

目次

1. 動枠によるレビ・チビタ接続の記述
2. スピノル束とスピノル接続
3. 反自己双対時空

以下, $(++++)$ 型計量 g をもつ時空 M を想定するが, $(++--)$ 型計量の場合も同様に扱える. 平坦時空の場合 $M \subset \mathbb{C}M \simeq \text{Gr}(2, \mathbb{C}^4)$ のように, g を複素化時空 $\mathbb{C}M$ 上の正則 2 次対称微分形式とみなして, それらをまとめて扱ってもよい.

1. 動枠によるレビ・チビタ接続の記述

正規直交動枠

計量に関して正規直交基底をなすような 1 次微分形式の組（**動枠, tetrad, vierbein**） $e^j = e^j_\mu dx^\mu$ （ $j = 0, 1, 2, 3$ ）と接ベクトルの組（**双対動枠**） $\partial_j = f^\mu_j \partial_\mu$ （ $j = 0, 1, 2, 3$, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ ）を考える.

$$g = \delta_{jk} e^j e^k = (e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2, \quad \langle e^j, \partial_k \rangle = \delta^j_k$$

レビ・チビタ接続

$$\nabla_{\partial_l}(\partial_k) = \Gamma^j_{kl} \partial_j, \quad \Gamma_{jkl} = \frac{1}{2}(c_{kjl} + c_{ljk} - c_{jkl})$$

c^i_{jk} は $[\partial_k, \partial_l] = c^j_{kl} \partial_j$ で決まる交換子係数である. 添え字の上げ下げは δ_{jk}, δ^{jk} で行う.

カルタンの構造方程式

第 1 構造方程式

$$de^j + \Gamma^j_k \wedge e^k = 0$$

第 2 構造方程式

$$d\Gamma^j_k + \Gamma^j_l \wedge \Gamma^l_k = \frac{1}{2} R^j_{klm} e^l \wedge e^m$$

ここで Γ^j_k は接続係数を微分形式にまとめたもの $\Gamma^j_k = \Gamma^j_{kl} e^l$ であり, R^j_{klm} は動枠に関するリーマン曲率の成分である. 後者は接続係数と交換子係数によって

$$R^j_{klm} = \partial_l \Gamma^j_{km} - \partial_m \Gamma^j_{kl} + \Gamma^j_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^j_{nm} \Gamma^n_{kl} - \frac{1}{2} \Gamma^j_{kn} c^n_{lm}$$

と表せる.

2. スピノル束とスピノル接続

ナル動枠の導入

正規直交動枠の複素線形結合 $e^{a\dot{a}}$ ($a = 0, 1, \dot{a} = \dot{0}, \dot{1}$)

$$(e^{a\dot{a}})_{a=0,1,\dot{a}=\dot{0},\dot{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^3 + ie^4 & -e^1 + ie^2 \\ e^1 + ie^2 & e^3 - ie^4 \end{pmatrix}$$

を考える. a を無点スピノル, $\dot{a}$ を有点スピノルの添え字とみなす.
これによって計量は

$$g = 2 \det(e^{a\dot{a}}) = \epsilon_{a\dot{a}} \epsilon_{b\dot{b}} e^{a\dot{a}} e^{b\dot{b}}$$

と表せるので (ϵ シンボル $\epsilon_{ab}, \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ は $\epsilon^{01} = \epsilon^{\dot{0}\dot{1}} = 1, \epsilon^{ab} + \epsilon^{ba} = 0, \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon^{\dot{b}\dot{a}} = 0$ と定めている), $e^{a\dot{a}}$ はいずれも **ナル (null)** である.

ナル双対動枠

接ベクトルについても複素線形結合

$$(\partial_{a\dot{a}})_{a=0,1;\dot{a}=\dot{0},\dot{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial_3 - i\partial_4 & -\partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 - i\partial_2 & \partial_3 + i\partial_4 \end{pmatrix}$$

を考えれば, $\langle e^{a\dot{a}}, \partial_{b\dot{b}} \rangle = \delta_b^a \delta_{\dot{b}}^{\dot{a}}$ という意味で $e^{a\dot{a}}$ の双対動枠になる.

スピノル添え字の上げ下げの規約

スピノル添字の上げ下げは

$$\phi^a = \epsilon^{ab} \phi_b, \quad \phi_b = \phi^a \epsilon_{ab}$$

という規則に従う. 結果として

$$\phi_a \psi^a = -\phi^a \psi_a, \quad \phi_{\dot{a}} \psi^{\dot{a}} = -\phi^{\dot{a}} \psi_{\dot{a}}$$

となるので要注意.

ゲージ変換

$e^{a\dot{a}}$ には計量を不変に保つ $SU(2) \times SU(2)$ ゲージ変換

$$e^{a\dot{a}} \rightarrow h^a_b e^{b\dot{b}} k^{\dot{a}}_{\dot{b}}, \quad h^a_b = h^a_b(x), \quad k^{\dot{a}}_{\dot{b}} = k^{\dot{a}}_{\dot{b}}(x)$$

が作用する．複素化時空の場合には $SU(2)$ は $SL(2, \mathbb{C})$ に変わる．

接束の分解

接束の複素化 $T^{\mathbb{C}}\mathcal{M} = \mathbb{C} \otimes T\mathcal{M}$ は無点スピノル束 S_- と有点スピノル束 S_+ のテンソル積に分解する：

$$T^{\mathbb{C}}\mathcal{M} \simeq S_- \otimes S_+, \quad v^j \partial_j = v^{a\dot{a}} \partial_{a\dot{a}}$$

前述の 2 つの $SU(2)$ (あるいは $SL(2, \mathbb{C})$) はそれぞれ $S_{\pm}$ の構造群になる．

接続係数の分解

動枠を e^j から $e^{a\dot{a}}$ に取り替えれば, 接続係数は Γ^j_{kl} から $\Gamma^{a\dot{a}}_{b\dot{b}c\dot{c}}$ に変わる. それを微分形式

$$\Gamma^{a\dot{a}}_{b\dot{b}} = \Gamma^{a\dot{a}}_{b\dot{b}c\dot{c}} e^{c\dot{c}}$$

にまとめて添え字 $a\dot{a}$ を下げたもの $\Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}}$ は

$$\Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}} + \Gamma_{b\dot{b}a\dot{a}} = 0$$

という反対称性をもち, 次のように分解される:

$$\begin{aligned} \Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}} &= \gamma_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon_{ab}\gamma_{\dot{a}\dot{b}}, \\ \gamma_{ab} = \gamma_{ba} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}}, \quad \gamma_{\dot{a}\dot{b}} = \gamma_{\dot{b}\dot{a}} = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}} \end{aligned}$$

レビ・チビタ接続の分解

ここで $a, \dot{a}$ を上に上げれば

$$\Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}} = \gamma^a{}_b \epsilon^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} + \epsilon^a{}_b \gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} = -\gamma^a{}_b \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} - \delta^a{}_b \gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}$$

となる．これはレビ・チビタ接続がスピノル束 $S_{\pm}$ 上のスピノル接続

$$\nabla_{\pm} = d + \gamma_{\pm}, \quad \gamma_- = (\gamma^a{}_b)_{a,b=0,1}, \quad \gamma_+ = (\gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}})_{\dot{a},\dot{b}=0,1}$$

に分解したことを意味する．それぞれの曲率が

$$R^a{}_b = d\gamma^a{}_b + \gamma^a{}_c \wedge \gamma^c{}_b, \quad R^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} = d\gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} + \gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \wedge \gamma^{\dot{c}}{}_{\dot{b}}$$

というように定まる．カルタンの第1構造方程式は

$$de^{a\dot{a}} = \gamma^a{}_b \wedge e^{b\dot{a}} + \gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \wedge e^{a\dot{b}}$$

という形に書き直せる．

リーマン曲率の分解

スピノル形式に書き直したリーマン曲率 ($R_{jklm} \leftrightarrow R_{a\dot{a}bb\dot{c}c\dot{d}d}$) は

$$R_{a\dot{a}bb\dot{c}c\dot{d}d} = \Psi_{abcd}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{\dot{c}\dot{d}} + \epsilon_{ab}\epsilon_{cd}\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} + \epsilon_{cd}\Phi_{ab\dot{c}\dot{d}}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon_{ab}\Phi_{cd\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{\dot{c}\dot{d}} \\ + \frac{R}{24}(\epsilon_{ac}\epsilon_{bd} + \epsilon_{ad}\epsilon_{bc})\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{\dot{c}\dot{d}} + \frac{R}{24}\epsilon_{ab}\epsilon_{cd}(\epsilon_{\dot{a}\dot{c}}\epsilon_{\dot{b}\dot{d}} + \epsilon_{\dot{a}\dot{d}}\epsilon_{\dot{b}\dot{c}})$$

というように分解される．ここで

- (1) $\Psi_{abcd}, \Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}$ (添字に関して完全対称) はワイルの共形曲率 C_{jklm} の反自己双対部分と自己双対部分に対応する．
- (2) $\Phi_{ab\dot{a}\dot{b}}$ (同種添字について対称) はトレースを差し引いたリッチ曲率 $R_{jk} - Rg_{jk}/4$ に対応する．

スピノル接続の曲率との関係

$$\frac{1}{2}R_{a\dot{a}bb\dot{c}cdd}e^{c\dot{c}} \wedge e^{d\dot{d}} = R_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon_{ab}R_{\dot{a}\dot{b}}$$

が成立する. これからスピノル接続の曲率 $R_{ab}, R_{\dot{a}\dot{b}}$ は

$$R_{ab} = \Psi_{abcd}S^{cd} + \Phi_{ab\dot{a}\dot{b}}S^{\dot{a}\dot{b}} + \frac{R}{12}S_{ab},$$

$$R_{\dot{a}\dot{b}} = \Psi_{\dot{a}\dot{b}cd}S^{cd} + \Phi_{ab\dot{a}\dot{b}}S^{ab} + \frac{R}{12}S_{\dot{a}\dot{b}}$$

と表せることがわかる. ここで

$$S^{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}e^{a\dot{a}} \wedge e^{b\dot{b}} \text{ (反自己双対 2 次微分形式の基底),}$$

$$S^{\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}e^{a\dot{a}} \wedge e^{b\dot{b}} \text{ (自己双対 2 次微分形式の基底)}$$

3. 反自己双対時空

さまざまな反自己双対条件

1. 右平坦時空 ($\mathcal{H}$ 空間あるいは Heaven) : $R_{\dot{a}\dot{b}} = 0$
 $(\iff \Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0, \Phi_{ab\dot{a}\dot{b}} = 0, R = 0)$
2. 共形的反自己双対 (あるいは単に反自己双対) 時空 : $\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0$
3. 特殊な共形的反自己双対時空
 - (1) 反自己双対アインシュタイン時空: $\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0, \Phi_{ab\dot{a}\dot{b}} = 0$
 - (2) 反自己双対スカラー平坦時空: $\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0, R = 0$
 - (3) 反自己双対リッチ平坦時空: $\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0, \Phi_{ab\dot{a}\dot{b}} = 0, R = 0$
 - (4) 超エルミート計量, 超ケーラー計量, スカラー平坦ケーラー計量 (ケーラー計量が共形的反自己双対 $\iff R = 0$)

右平坦時空の例：Gibbons-Hawking 計量

$$g = V((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) + V^{-1}(dt + A)^2$$

函数 $V = V(x^1, x^2, x^3)$ と微分形式 $A = A_j(x^1, x^2, x^3)dx^j$ が **モノポール方程式**

$$*dV = dA \quad (\Longleftrightarrow \nabla V = \nabla \times \mathbf{A})$$

を満たすとき g は右平坦計量 ($K = \partial/\partial t$ はそのキリングベクトル場) になる. 特に V, A を

$$V = 1 + \sum_{m=1}^N \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|}, \quad A = \sum_{m=1}^N \cos \theta_m d\phi_m$$

((r_m, θ_m, ϕ_m) は $\mathbf{x}_m$ 中心の極座標を表す) と選べば, Taub-NUT 計量 ($N = 1$), Eguchi-Hanson 計量 ($N = 2$) などの重力インスタントンが得られる.

右平坦時空の例：Belinski-Gibbons-Page-Pope 計量

$$g = w_1 w_2 w_3 (d\rho)^2 + \frac{w_2 w_3}{w_1} (\sigma_1)^2 + \frac{w_3 w_1}{w_2} (\sigma_2)^2 + \frac{w_1 w_2}{w_3} (\sigma_3)^2$$

ここで w_1, w_2, w_3 は ρ のみの関数 $w_i = w_i(\rho)$ であり, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は $SU(2)$ の上の右不変ベクトル場で

$$d\sigma_1 + \sigma_2 \wedge \sigma_3 = 0, \quad d\sigma_2 + \sigma_3 \wedge \sigma_1 = 0, \quad d\sigma_3 + \sigma_1 \wedge \sigma_2 = 0$$

という条件を満たす. 具体的には $SU(2) \simeq S^3$ のオイラー角によって

$$\sigma_1 + i\sigma_2 = e^{-\psi} (d\theta + i \sin \theta d\phi), \quad \sigma_3 = d\psi + \cos \theta d\phi$$

と表せる. w_1, w_2, w_3 が **オイラー方程式**

$$\frac{dw_1}{d\rho} = w_2 w_3, \quad \frac{dw_2}{d\rho} = w_3 w_1, \quad \frac{dw_3}{d\rho} = w_1 w_2$$

を満たすとき g は右平坦計量になる.

Plebanski による右平坦時空の記述

右平坦時空 ($R^{\dot{a}}_{\dot{b}} = 0$) においては, $SU(2)$ 右ゲージ変換 $e^{a\dot{a}} \rightarrow e^{ab} h^{\dot{a}}_{\dot{b}}$ によって

$$\gamma^{\dot{a}}_{\dot{b}} = 0$$

が成立する動枠に移ることができる. このとき, スピノル表示された第 1 構造方程式 $de^{a\dot{a}} = \gamma^a_b \wedge e^{b\dot{a}} + \gamma^{\dot{a}}_{\dot{b}} \wedge e^{ab}$ から, 自己双対 2 次微分形式の基底 $S^{\dot{a}\dot{b}}$ が閉微分形式であること

$$dS^{\dot{a}\dot{b}} = 0$$

がわかる (逆にこれが右平坦性を特徴づけることもわかる).

Plebanski は特別な局所座標系を導入してこれらの方程式を部分的に解き, 残りの方程式が 1 個の未知函数 (ポテンシャル) に対する 2 階非線形微分方程式 (**heavenly equation, 天界方程式**) に帰着することを見出した.

実際には, Plebanski は 2 種類 of 天界方程式を与えている.

第 1 天界方程式

これはケーラー的座標系 $(y, z, \bar{y}, \bar{z})$ によって $e^{a\dot{a}}$ を

$$\begin{aligned} e^{0\dot{0}} &= dy, & e^{0\dot{1}} &= -\Omega_{z\bar{y}}d\bar{y} - \Omega_{z\bar{z}}d\bar{z}, \\ e^{1\dot{0}} &= dz, & e^{1\dot{1}} &= \Omega_{y\bar{y}}d\bar{y} + \Omega_{y\bar{z}}d\bar{z} \end{aligned}$$

(以後特に断らない限り, 添え字は $\Omega_{yz} = \partial_y \partial_z \Omega$, 等々というように偏微分することを意味する) と表すときにポテンシャル Ω が満たすべき方程式で,

$$\Omega_{y\bar{y}}\Omega_{z\bar{z}} - \Omega_{y\bar{z}}\Omega_{z\bar{y}} = 1$$

という形をしている. この方程式はすでに Calabi によってリッチ平坦なケーラー計量を特徴づけるものとして見出されていた.

第2天界方程式

これは別の座標系 (y, z, p, q) によって $e^{a\dot{a}}$ を

$$\begin{aligned} e^{0\dot{0}} &= dy, & e^{0\dot{1}} &= dp + \Theta_{pq}dy + \Theta_{qq}dz, \\ e^{1\dot{0}} &= dz, & e^{1\dot{1}} &= dq - \Theta_{pp}dy - \Theta_{pq}dz \end{aligned}$$

と表すときにポテンシャル Θ が満たすべき方程式で,

$$\Theta_{qy} - \Theta_{pz} + \Theta_{pp}\Theta_{qq} - (\Theta_{pq})^2 = 0$$

という形をしている．対応する計量は

$$g = 2dydq - 2dzdp - 2\Theta_{pp}(dy)^2 - 4\Theta_{pq}dydz - 2\Theta_{qq}(dz)^2$$

となる．

II. ツイスター空間の構成と逆構成

目次

1. 反自己双対時空のツイスター空間
2. 右平坦時空のツイスター空間
3. 右平坦時空の生成
4. 右平坦時空の生成の例

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} = \mathcal{X} \times \mathbb{CP}^1 & \\ p_2 \swarrow & & \searrow p_1 \\ \mathcal{X} = \mathbb{CM} & & \mathcal{Z} \end{array}$$

1. 反自己双対時空のツイスター空間

以下，複素化時空 $\mathcal{X} = \mathbb{C}\mathcal{M}$ の上で話を進める． g はその上の正則非退化 2 次対称微分形式とする．その他の多様体も複素多様体である．

ツイスターを定める全微分方程式系

正確に言えばスピノル束 S_+ をファイバー方向に射影化した $\mathbb{CP}^1$ 束 $\mathcal{F} = \mathbb{P}(S_+)$ の上で考えるべきところだが，話を簡単にするために，それを自明化した

$$\mathcal{F} = \mathcal{X} \times \mathbb{CP}^1$$

の上で全微分方程式系

$$\mathcal{D}: \quad e^{a\dot{a}} \lambda_{\dot{a}} = 0, \quad d\lambda^{\dot{a}} + \gamma^{\dot{a}}_{\dot{b}} \lambda^{\dot{b}} = 0$$

を考える．ここで $\lambda = (\lambda_{\dot{0}}, \lambda_{\dot{1}})$ は $\mathbb{CP}^1$ の斉次座標である．

ツイスターを定める全微分方程式系（続き）

$\lambda_{\dot{0}} \neq 0$ の部分に限れば, 非斉次座標 $\zeta = \lambda_{\dot{1}}/\lambda_{\dot{0}}$ を用いてこの全微分方程式系 $\mathcal{D}$ を

$$e^{0\dot{0}} + e^{0\dot{1}}\zeta = 0, \quad e^{1\dot{1}} + e^{1\dot{0}}\zeta = 0, \quad d\zeta = \theta$$

という形に書き直すこともできる. ここで θ は

$$\theta = -\lambda_{\dot{0}}^{-2} \gamma^{\dot{a}}_{\dot{b}} \lambda_{\dot{a}} \lambda^{\dot{b}} = \gamma_{\dot{0}\dot{0}} \zeta^2 - 2\gamma_{\dot{0}\dot{1}} \zeta + \gamma_{\dot{1}\dot{1}}$$

という 1 次微分形式である. $\mathcal{F}$ の各点の接空間においてこれらの方程式が定める部分空間は

$$L_0 = \partial_{0\dot{1}} - \zeta \partial_{0\dot{0}} + \langle \theta, \partial_{0\dot{1}} - \zeta \partial_{0\dot{0}} \rangle \partial_{\zeta},$$

$$L_1 = \partial_{1\dot{1}} - \zeta \partial_{1\dot{0}} + \langle \theta, \partial_{1\dot{1}} - \zeta \partial_{1\dot{0}} \rangle \partial_{\zeta}$$

というベクトル場（**ラックス表示**に使える）で張られる.

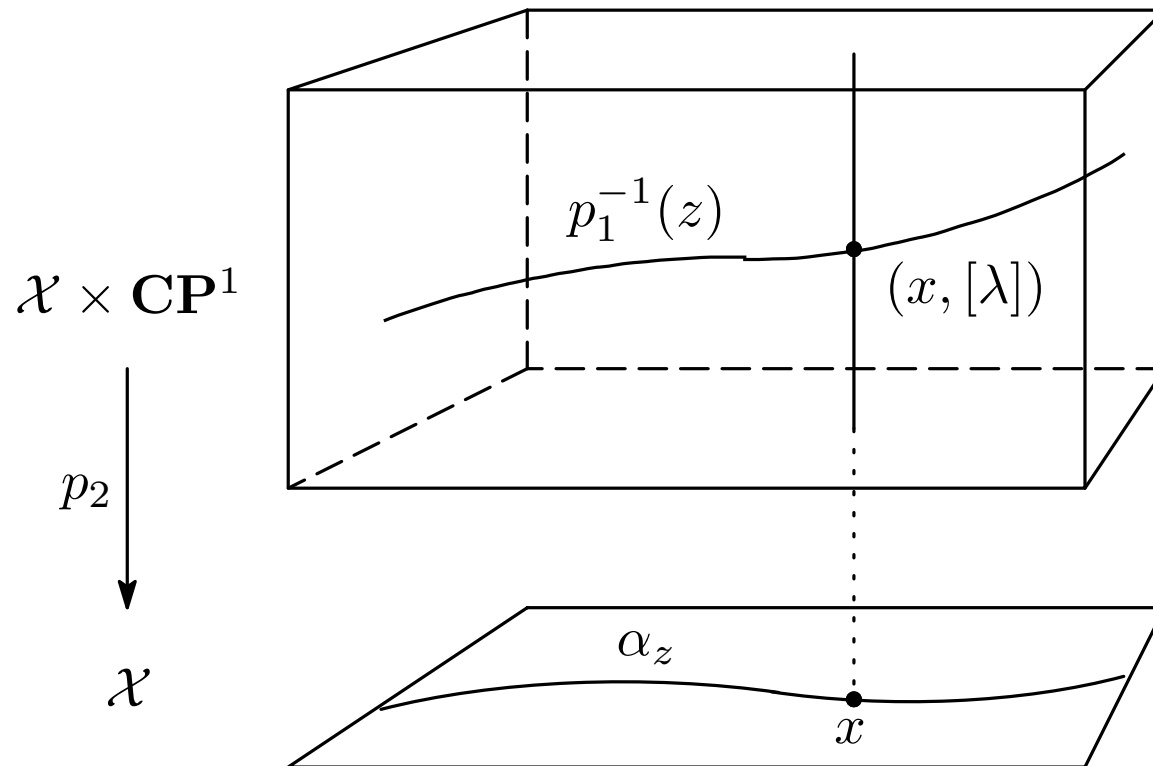
ツイスター空間の構成 (Boyer à la Atiyah-Hitchin-Singer)

計量 g が共形的反自己双対 ($\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0$) ならば, 全微分方程式系 $\mathcal{D}$ はフロベニウスの意味で可積分 ($[L_0, L_1] = 0 \pmod{\{L_0, L_1\}}$) であり, $\mathcal{F}$ の各点においてそれを通る 2 次元の積分多様体が存在する.

この積分多様体の一つ一つがツイスターであり, それら全体の集合 $\mathcal{Z}$ ($\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Z} = 3$) がこの場合のツイスター空間である. $\mathcal{F}$ の各点に対してそれを通る積分多様体に対応させる写像を $p_1 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Z}$ と表す. 各積分多様体は $\mathcal{X}$ への射影 $p_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$ によって $\mathcal{X}$ の中の α 曲面に対応する. 他方, 各時空点 $x \in \mathcal{X}$ は $\mathcal{Z}$ の中のツイスター曲線 $\Gamma_x = p_1(p_2^{-1}(x)) \simeq \mathbb{CP}^1$ を定める. こうしてツイスター対応

$$\mathcal{X} \xleftarrow{p_2} \mathcal{F} \xrightarrow{p_1} \mathcal{Z}$$

が決まる.



図：全微分方程式系 $\mathcal{D}$ の積分多様体 $p_1^{-1}(z)$ とそれに対応する α 曲面 $\alpha_z = p_2(p_1^{-1}(z))$ （いずれも 1 次元的に描いているが、実際には 2 次元である）

2. 右平坦時空のツイスター空間

右平坦時空のツイスター空間は反自己双対時空としてのツイスター空間に付加構造が加わったものになる.

Gindikin のペンシル

Gindikin にならって, 自己双対 2 次微分形式 $S^{\dot{a}\dot{b}}$ を $\mathbb{CP}^1$ の斉次座標 λ の 2 次形式としてまとめたもの

$$\Sigma(\lambda) = S^{\dot{a}\dot{b}} \lambda_{\dot{a}} \lambda_{\dot{b}} = \frac{1}{2} \epsilon_{ab} (e^{a\dot{a}} \lambda_{\dot{a}}) \wedge (e^{b\dot{b}} \lambda_{\dot{b}})$$

あるいは非斉次座標 $\zeta = \lambda_1/\lambda_0$ の 2 次式にしたもの

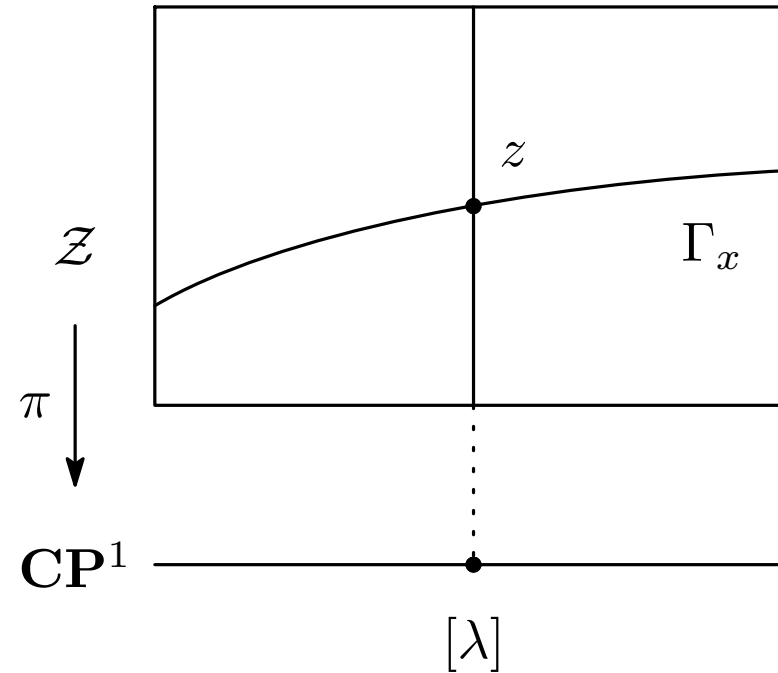
$$\sigma(\zeta) = S^{\dot{0}\dot{0}} + 2S^{\dot{0}\dot{1}}\zeta + S^{\dot{1}\dot{1}}\zeta^2 = (e^{0\dot{0}} + e^{0\dot{1}}\zeta) \wedge (e^{1\dot{0}} + e^{1\dot{1}}\zeta)$$

を考える. $\Sigma(\lambda) \wedge \Sigma(\lambda) = 0$, $\sigma(\zeta) \wedge \sigma(\zeta) = 0$ が成立することに注意.

右平坦性からの帰結

右平坦性 $R^{\dot{a}}_{\dot{b}} = 0$ のもとで Plebanski のゲージ $\gamma^{\dot{a}}_{\dot{b}} = 0$ を選ぶ. このとき以下のことがわかる (Penrose, Gindikin).

- (1) 全微分方程式系 $\mathcal{D}$ は $e^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} = 0, d\lambda^{\dot{a}} = 0$ という形になる. 特に $\lambda_{\dot{a}}$ は積分多様体上で一定の値をとるので, それを対応させる写像 $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ が定義される. 各ファイバー $\pi^{-1}(\lambda)$ は 2 次元であり, $\mathcal{Z}$ は $\mathbb{CP}^1$ 上のファイバー空間の構造をもつ.
- (2) $\Sigma(\lambda)$ は π の各ファイバーの上に 2次元シンプレクティック構造を定める. より正確には, $\mathcal{Z}$ 上に微分形式 Σ があり, $\Sigma(\lambda)$ はその引き戻し $p_1^*\Sigma$ である. Σ は λ について斉次 2 次で, λ 方向の微分を含まず, π の各ファイバーの上にシンプレクティック構造を定める.



図：右平坦時空のツイスター空間 $\mathcal{Z}$ は射影 $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ によって $\mathbb{CP}^1$ 上のファイバー空間としての構造をもつ．各ファイバーは2次元シンプレクティック多様体になる．時空点 $x \in \mathcal{X}$ に対応するツイスター曲線 Γ_x はこのファイバー空間の断面とみなせる．

逆構成

逆に，このようなファイバー空間 $\mathcal{Z}$ とその上の 2 次微分形式 Σ (λ について 2 次斉次で， λ 方向の微分を含まず， $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ の各ファイバーにシンプレクティック構造を定める) が与えられれば（実際には，多少の条件が加わる），そこから右平坦時空が復元（あるいは生成）される．時空多様体は π の断面全体の集合

$$\mathcal{X} = \{\Gamma \subset \mathcal{Z} \mid \pi|_{\Gamma}: \Gamma \simeq \mathbb{CP}^1 \text{ (正則同型)}\}$$

として得られる．各 Γ の法束に対する条件

$$N_{\Gamma}\mathcal{Z} \simeq (\pi|_{\Gamma})^*(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)) \text{ (ベクトル束の正則同型)}$$

のもとで $\mathcal{X}$ は実際に 4 次元になる．他方， Σ から $\mathcal{X} \times \mathbb{CP}^1$ 上の微分形式 $\Sigma(\lambda)$ が定まり，そこから動枠 $e^{a\dot{a}}$ を読み取って計量が定まる．次節では，これらの手順をやや特殊な設定（時空の局所的記述に相当する）で説明する．

3. 右平坦時空の生成

貼り合わせによるツイスター空間の構成

$\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ の被覆 $D_0 = \{|\zeta| < r_0\}$, $D_\infty = \{|\zeta| > r_\infty\}$ を考える.
 $U_0 = W \times D_0$, $U_\infty = V \times D_\infty$ (W, V は $\mathbb{C}^2$ の開集合とする) の点
 $(w^0, w^1, \zeta) \in U_0$ と $(v^0, v^1, \zeta) \in U_\infty$ を

$$v^0 = f^0(w^0, w^1, \zeta), \quad v^1 = f^1(w^0, w^1, \zeta)$$

という等式 (変換関数 f^0, f^1 は正則とする) が成立するときに同一視すれば, $\mathbb{CP}^1$ 上のファイバー空間 $\mathcal{Z}$ が得られる. さらに, 変換関数系が**シンプレクティック条件**

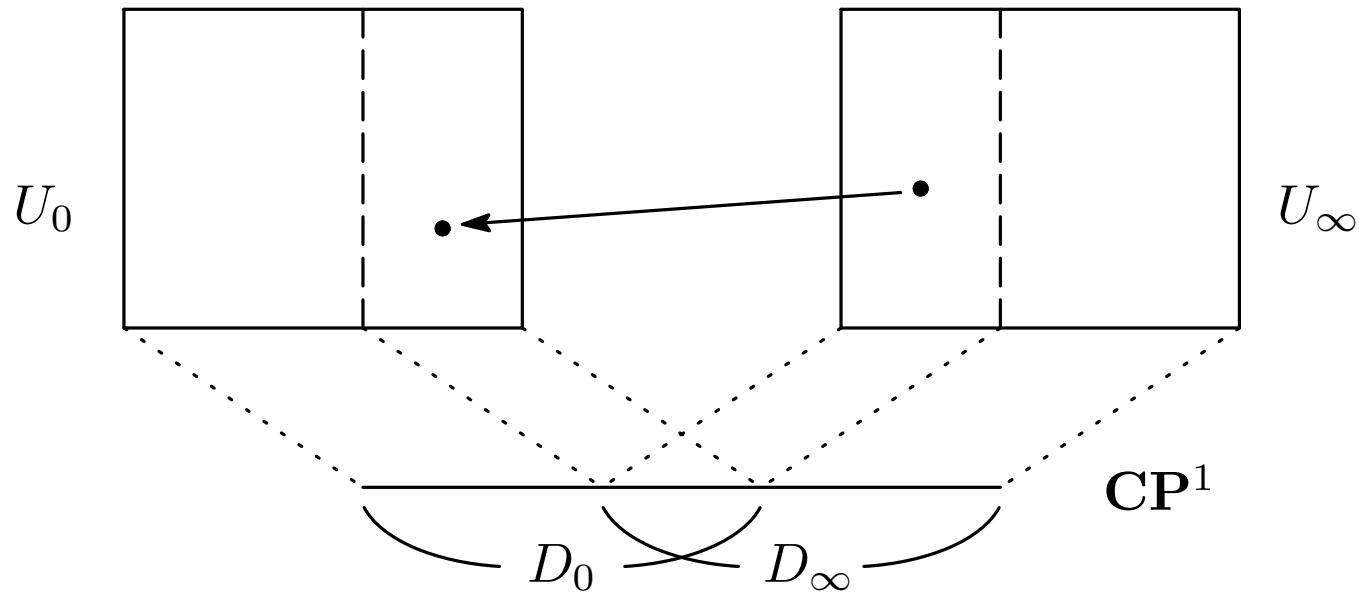
$$\frac{\partial(f^0, f^1)}{\partial(w^0, w^1)} = \frac{\partial f^0}{\partial w^0} \frac{\partial f^1}{\partial w^1} - \frac{\partial f^0}{\partial w^1} \frac{\partial f^1}{\partial w^0} = \zeta^{-2}$$

を満たせば,

π の各ファイバー上で

$$\hat{d}w^0 \wedge \hat{d}w^1 = \zeta^2 \hat{d}v^0 \wedge \hat{d}v^1$$

という等式が成立する. ここで $\hat{d}$ は ζ を定数とみなして全微分することを表す. $\zeta = \lambda_1/\lambda_0$ とみなして, この等式の両辺に λ_0^2 を乗じたものを Σ と定める.



非線形リーマン・ヒルベルト問題

このファイバー空間 $\mathcal{Z}$ の断面（すなわち、ツイスター曲線 Γ ）は

$$v^0(\zeta) = f^0(w^0(\zeta), w^1(\zeta), \zeta), \quad v^1(\zeta) = f^1(w^0(\zeta), w^1(\zeta), \zeta)$$

という方程式を満たすような D_0 上の正則関数 $w^a(\zeta)$ と D_∞ 上の正則関数 $v^a(\zeta)$ の組で表現される．このような正則関数の組を求めることは一種のリーマン・ヒルベルト問題であるが、通常の場合と違って非線形問題になる．しかも、4次元時空を得るには、この問題の解の4パラメータ変形族が必要である（変形パラメータが時空多様体 $\mathcal{X}$ の座標になる）．変換関数系が平坦時空に相当する場合

$$f^0(w^0, w^1, \zeta) = \zeta^{-1} w^0, \quad f^1(w^0, w^1, \zeta) = \zeta^{-1} w^1$$

に近ければそのような解の4パラメータ変形族の存在は保証されるが、あとで紹介するような特別な場合（他にもいろいろ知られているが）を除けば、具体的に解の表示を求めることは難しい．

$\sigma(\zeta)$ を読み取ること

変換関数系が満たすシンプレクティック条件によって、非線形リーマン・ヒルベルト問題の解 $v^a(\zeta), w^a(\zeta)$ は

$$\hat{d}w^0(\zeta) \wedge \hat{d}w^1(\zeta) = \zeta^2 \hat{d}v^0(\zeta) \wedge \hat{d}v^1(\zeta)$$

という等式を満たす．ここでの $\hat{d}$ は解の 4 個の変形パラメータ（時空多様体 $\mathcal{X}$ の座標）についての全微分を表す． $v^a(\zeta), w^a(\zeta)$ の正則性から、この等式の両辺は ζ について 2 次式になり、

$$\sigma(\zeta) = \sigma_0 + \sigma_1 \zeta + \sigma_2 \zeta^2 \quad (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \text{ は } \mathcal{X} \text{ 上の 2 次微分形式})$$

と表せる． $\sigma(\zeta) = \hat{d}w^0(\zeta) \wedge \hat{d}w^1(\zeta) = \zeta^2 \hat{d}v^0(\zeta) \wedge \hat{d}v^1(\zeta)$ から

$$\sigma(\zeta) \wedge \sigma(\zeta) = 0, \quad \hat{d}\sigma(\zeta) = 0$$

ということもわかる．

$e^{a\dot{a}}$ を読み取ること

非退化性条件 $\sigma_0 \wedge \sigma_2 \neq 0$ を仮定すれば, $\sigma(\zeta) \wedge \sigma(\zeta) = 0$ を ζ について展開して得られる等式 $\sigma_0 \wedge \sigma_0 = 0, \dots, \sigma_2 \wedge \sigma_2 = 0$ から

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= e^0 \wedge e^1, & \sigma_2 &= \tilde{e}^0 \wedge \tilde{e}^1, \\ \sigma_1 &= Ae^0 \wedge \tilde{e}^0 + Be^0 \wedge \tilde{e}^1 + Ce^1 \wedge \tilde{e}^0 + De^1 \wedge \tilde{e}^1, \\ AD - BC &= 1\end{aligned}$$

となるような線形独立な 1 次微分形式 $e^0, e^1, \tilde{e}^0, \tilde{e}^1$ ならびにスカラー A, B, C, D の存在がわかる. 動枠 $e^{a\dot{a}}$ を

$$\begin{aligned}e^{0\dot{0}} &= e^0, & e^{0\dot{1}} &= -C\tilde{e}^0 - D\tilde{e}^1, \\ e^{1\dot{0}} &= e^1, & e^{1\dot{1}} &= A\tilde{e}^0 + B\tilde{e}^1\end{aligned}$$

と定めれば, 右平坦な計量が $g = 2 \det(e^{a\dot{a}})$ の形で得られる.

Plebanski の時空記述との関係

$w^a(\zeta), v^a(\zeta)$ のローラン展開を

$$w^a(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^a \zeta^n, \quad v^a(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^a \zeta^{-n}$$

と表せば

$$\sigma_0 = dw_0^0 \wedge dw_0^1, \quad \sigma_2 = dv_0^0 \wedge dv_0^1$$

となる．前述の非退化性条件のもとでは $dw_0^0 \wedge dw_0^1 \wedge dv_0^0 \wedge dv_0^1 \neq 0$ であるから，

$$y = w_0^0, \quad z = w_0^1, \quad \bar{z} = -v_0^0, \quad \bar{y} = v_0^1$$

を時空座標に選べる．

Plebanski の時空記述との関係 (続き)

他方, σ_1 は

$$\sigma_1 = dy \wedge dw_1^1 + dw_1^0 \wedge dz = dv_1^0 \wedge d\bar{y} - d\bar{z} \wedge dv_1^1$$

というように 2 通りに表せる. これから

$$d(w_1^1 dy - w_1^0 dz + v_1^0 d\bar{y} + v_1^1 d\bar{z}) = 0$$

という等式が従うが, これは

$$d\Omega = w_1^1 dy - w_1^0 dz + v_1^0 d\bar{y} + v_1^1 d\bar{z}$$

というポテンシャル $\Omega = \Omega(y, z, \bar{y}, \bar{z})$ の存在を保証する.

$\sigma_1 \wedge \sigma_1 + 2\sigma_0 \wedge \sigma_2 = 0$ を書き直せば第 1 天界方程式になる.

同様の考察によって, $y = w_0^0, z = w_0^1, p = w_1^0, q = w_1^1$ を時空座標に選べば, 第 2 天界方程式による時空記述が得られる. 2 つの時空記述がルジヤンドル変換で結ばれることもわかる.

4. 右平坦時空の生成の例

Tod と Ward は前節の手順が具体的に実行できる例をいくつか示している．そのうちの一つを少し整理して紹介する．じつはこの例は Gibbons-Hawking 型計量を見かけの異なる形で表したものである．また，この例から Plebanski の時空記述のもう一つの変種も見えてくる．

非線形リーマン・ヒルベルト問題の設定

次の形の非線形リーマン・ヒルベルト問題を考える．

$$v^0(\zeta) = \zeta^{-2}w^0(\zeta), \quad v^1(\zeta) = w^1(\zeta) + f(w^0(\zeta), \zeta)$$

$f(w, \zeta)$ は $\mathbb{C} \times (D_0 \cap D_\infty)$ 上の任意の正則関数である．

非線形リーマン・ヒルベルト問題を解く

第1式の両辺に ζ^2 を乗じたものは ζ の整函数で, $\zeta = \infty$ で高々2位の極をもつので, ζ の2次式になる. この2次式を

$$w^0(\zeta) = \zeta^2 v^0(\zeta) = y + p\zeta + r\zeta^2$$

と表せば (y, p, r は時空座標の一部になる), 第2式は $f(y + p\zeta + r\zeta^2, \zeta)$ を D_0 上の正則函数と D_∞ 上の正則函数の差に分解する問題

$$f(y + p\zeta + r\zeta^2, \zeta) = v^1(\zeta) - w^1(\zeta)$$

に帰着する. この問題はローラン展開によってただちに解ける.

非線形リーマン・ヒルベルト問題を解く (続き)

$f(y + p\zeta + r\zeta^2, \zeta)$ のローラン展開を

$$f(y + p\zeta + r\zeta^2, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \zeta^n, \quad f_n = f_n(y, p, r),$$

と表す. ここに $v^1(\zeta), w^1(\zeta)$ のローラン展開を代入して係数を合わせればよい. この際, 任意定数 (4 番目の時空座標) が 1 個生じる. w_0^1 をこの任意定数を選んで z と表せば, $w^1(\zeta), v^1(\zeta)$ は具体的に次の形に決まる:

$$w^1(\zeta) = z - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \zeta^n, \quad v^1(\zeta) = z + f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} \zeta^{-n}$$

これから動枠を求める計算は以下のように一般的な設定で説明できる.

第3のポテンシャル

上の例に限らず，一般に

$$y = w_0^0, \quad p = w_1^0, \quad r = w_2^0, \quad z = w_0^1$$

が函数的に独立であれば，それらを時空座標に選ぶことができる．このとき Ω, Θ の場合と同様にして

$$dF = w_1^1 dr + w_2^1 dp + w_3^1 dy - w_3^0 dz$$

というポテンシャル $F = F(y, z, p, r)$ の存在がわかる． F は**第3天界方程式**と呼ぶべき次の方程式を満たす：

$$F_{pp} - F_{ry} + F_{rr}F_{pz} - F_{rz}F_{pr} = 0$$

動枠の表示

上の一般的な設定において、 $\sigma(\zeta)$ は座標 y, z, p, r とポテンシャル F を用いて

$$\sigma(\zeta) = dy \wedge dz + \zeta(dy \wedge dF_r + dp \wedge dz) + \zeta^2(dt \wedge dF_p + dp \wedge dF_r + dr \wedge dz)$$

と表せる．これから既に説明した一般的な手順で動枠を求めれば

$$\begin{aligned} e^{00} &= dy, & e^{01} &= dp + \frac{F_{pr}}{F_{rr}} dy - \frac{1}{F_{rr}} dz, \\ e^{10} &= dz, & e^{11} &= dF_r + \frac{(F_{pr})^2 - F_{pp}F_{rr}}{F_{rr}} dy - \frac{F_{pr}}{F_{rr}} dz \end{aligned}$$

となる．結果として得られる計量の表示はかなり複雑である．

ポテンシャルの積分表示

もとの非線形リーマン・ヒルベルト問題の設定に戻れば, F を定める方程式は

$$\begin{aligned} F_r &= w_1^1 = -f_1, & F_p &= w_2^1 = -f_2, \\ F_y &= w_3^1 = -f_3, & F_z &= w_3^0 = 0 \end{aligned}$$

となる. f_n は $|\zeta| = r$ ($r_\infty < r < r_0$) に沿った周回積分で表せる. それらの周回積分表示から F 自体が

$$F = - \oint_{|\zeta|=r} f(y + p\zeta + r\zeta^2, \zeta) \frac{\zeta^{-4} d\zeta}{2\pi i}$$

($g(w, \zeta)$ は $f(w, \zeta)$ の w に関する原始関数である) という周回積分表示をもつことがわかる.

ポテンシャルの性質

この F は z に依存せず,

$$F_{pp} - F_{rz} = 0$$

という微分方程式を満たす. これはちょうど第3天界方程式に**並進不変性** $F_z = 0$ を課したものである. この線形微分方程式は $4dydr - (dp)^2$ という計量に関する3次元ラプラス方程式とみなせる. $F_z = 0$ のもとで既に求めた $e^{a\dot{a}}$ の表示から計量を計算してみれば, 計量は

$$g = \frac{F_{rr}}{2}(4dydr - (dp)^2) + \frac{2}{F_{rr}} \left(dz - \frac{F_{rr}}{2}dp - F_{pr}dy \right)^2$$

という形にまとまる. これは F_{rr} (の定数倍) をポテンシャル V とする Gibbons-Hawking 型計量と実質的に同じものである.

III. 次元簡約と可積分系

目次

1. 可積分系への次元簡約の例：無分散戸田方程式
2. 可積分系への次元簡約の例：無分散 KP 方程式
3. 3次元アインシュタイン・ワイル空間

右平坦時空や共形的反自己双対時空からの次元簡約によっていろいろな可積分系を導くことができる。これは反自己双対ヤン・ミルズ方程式について知られていることの重力版であるが、右平坦・共形的反自己双対時空からすなおに得られるのは無分散可積分系と呼ばれるものである。しかし、今回は紹介しないが、驚くべきことに、本来のソリトン方程式である非線形シュレディンガー方程式や等モノドロミー変形の方程式であるパンルヴェ方程式もそこに隠れている。

1. 可積分系への次元簡約の例：無分散戸田方程式

無分散戸田方程式

これは 3 次元空間上の場 $\phi = \phi(x, z, \bar{z})$ に対する非線形微分方程式

$$\phi_{z\bar{z}} = \partial_x(e^{-\phi_x})$$

である．この方程式は 2 次元戸田場の方程式

$$\phi(s)_{z\bar{z}} = e^{\phi(s)-\phi(s+1)} - e^{\phi(s-1)-\phi(s)} \quad (s \in \mathbb{Z})$$

の格子座標 s の連続体極限で得られるもので、有限格子上の 2 次元戸田場の方程式の長さ $N \rightarrow \infty$ の極限，という意味で $SU(\infty)$ 戸田方程式と呼ばれることもある．この方程式は 2 次元戸田場の方程式のもつ可積分系としてのさまざまな性質を引き継いでいる．ただ、「分散性」が失われているので、ソリトン解は存在しない．

第1天界方程式からの導出 (Boyer-Finley)

第1天界方程式 $\Omega_{y\bar{y}}\Omega_{z\bar{z}} - \Omega_{y\bar{z}}\Omega_{z\bar{y}} = 1$ の S^1 対称性をもつ解

$$\Omega = u(\rho, z, \bar{z}), \quad \rho = y\bar{y},$$

を考える. u に対する方程式は

$$(\rho u_\rho)_\rho u_{z\bar{z}} - \rho u_{\rho z} u_{\rho\bar{z}} = 1$$

となる. 新たに $x = \rho u_\rho$, $w = u_z$, $\bar{w} = u_{\bar{z}}$ という従属変数を導入してこれを書き直せば

$$du = x d \log \rho + w dz + \bar{w} d\bar{z}, \quad x_\rho \bar{w}_z - x_z \bar{w}_\rho = 1$$

となる. 第2式がシンプレクティック条件であることに注意せよ:

$$\frac{\partial(x, \bar{w})}{\partial(\rho, z)} = x_\rho \bar{w}_z - x_z \bar{w}_\rho = 1$$

第1天界方程式からの導出（続き）

このシンプレクティック条件を3次微分形式の方程式に書き直せば

$$dx \wedge d\bar{w} \wedge d\bar{z} = \frac{\partial(x, \bar{w})}{\partial(\rho, z)} d\rho \wedge dz \wedge d\bar{z} = d\rho \wedge dz \wedge d\bar{z}$$

となる．ここで $x, z, \bar{z}$ を独立変数に選んで $\phi = u - x \log \rho$ をそれらの関数とみなせば（要するにルジャンドル変換である）

$$d\phi = du - x d \log \rho - \log \rho dx = -\log \rho dx + w dz + \bar{w} d\bar{z}$$

だから $\phi_x = -\log \rho$, $\phi_z = w$, $\phi_{\bar{z}} = \bar{w}$ となることがわかる．これらを用いて上の3次微分形式の方程式の両辺を書き直せば

$$LHS = dx \wedge d\phi_{\bar{z}} \wedge d\bar{z} = \phi_{z\bar{z}} dx \wedge dz \wedge d\bar{z},$$

$$RHS = d(e^{-\phi_s}) \wedge dz \wedge d\bar{z} = \partial_x(e^{-\phi_x}) dx \wedge dz \wedge d\bar{z}$$

となって，求める方程式が得られる．

4 次元計量を ϕ で表すこと

対応する右平坦計量 $g = 2\Omega_{y\bar{y}}dyd\bar{y} + \dots$ を新たなポテンシャル ϕ と座標 $x, z, \bar{z}$ で書き直すことを考える. 第 4 の座標として

$$t = \log(y/\bar{y})$$

を用いれば (∂_t は S^1 対称性のキリングベクトルになる), ここでは紹介できないものすごく長くて単調な計算の後, 計量は次のきれいな形にまとまる:

$$g = 2\phi_{xx}\left(-\frac{(dx)^2}{4} + e^{-\phi_x}dzd\bar{z}\right) + \frac{1}{2\phi_{xx}}(dt + \phi_{xz}dz - \phi_{x\bar{z}}d\bar{z})^2$$

この表示が Gibbons-Hawking 型計量に似ていることに注目されたい. ただし, Gibbons-Hawking 型計量と違って, 第 1 項に現れた 3 次元計量は平坦ではない.

2. 可積分系への次元簡約の例：無分散 KP 方程式

無分散 KP 方程式

ソリトン理論で用いられる通常の記号に従えば，無分散 KP 方程式は 2+1 次元空間上の場 $u = u(x, y, t)$ に対する微分方程式

$$(u_t + uu_x)_x = u_{yy}$$

である．本来の KP 方程式（2 次元 KdV 方程式とも呼ばれる）では

$$(u_t + uu_x + cu_{xxx})_x = u_{yy}$$

というように新たな項 cu_{xxx} （分散項）が付け加わり，ソリトン解（海岸の波に似ている）が存在する．ちなみに，KdV 方程式は

$$u_t + uu_x + cu_{xxx} = 0$$

である． $u_y = 0$ の場合は u の再定義によってこれに帰着する．

第 2 天界方程式からの導出 (Dunajski)

第 2 天界方程式 $\Theta_{qy} - \Theta_{pz} + \Theta_{pp}\Theta_{qq} - (\Theta_{pq})^2 = 0$ の解を次の形に仮定する：

$$\Theta = ypq + qA(y, z) + pB(y, z) + G(q, z, u), \quad u = p + y^2.$$

これは $K = \partial_y - 2y\partial_p$ がキリングベクトルであることを仮定したことになる (らしい). この仮定のもとで天界方程式は

$$A_y - B_z - 2y^2 + u - G_{zu} + G_{uu}G_{qq} - (G_{qu})^2 = 0$$

となる. A, B を $A = y^3, B = -y^2z$ と選べば y 依存の項が消えて

$$u - G_{zu} + G_{uu}G_{qq} - (G_{qu})^2 = 0$$

が残る.

第 2 天界方程式からの導出 (続き)

上の方程式を微分形式で書き直せば

$$udq \wedge dq \wedge dz - dq \wedge du \wedge dG_u + dG_q \wedge dG_u \wedge dz = 0$$

となる. ここで $x = G_u(q, z, u)$ と q, z を新たな独立変数に選んで $H = H(x, q, z) = G - xu$ の全微分を書けば (これもルジャンドル変換である)

$$dH = dG - xdu - udx = G_q dq + G_z dz - udx$$

だから $H_q = G_q$, $H_z = G_z$, $H_x = -u$ である. これらを用いて上の 3 次微分形式の方程式を書き直せば

$$H_x dq \wedge dH_x \wedge dz + dq \wedge dH_x \wedge dx + dH_q \wedge dx \wedge dz = 0$$

第 2 天界方程式からの導出 (続き)

ここから $dx \wedge dq \wedge dz$ の係数を取り出せば

$$-H_x H_{xx} + H_{xz} - H_{qq} = 0$$

という方程式が得られる. これを x で微分して $H_x = -u$ を代入すれば

$$-(uu_x)_x + u_{xz} + u_{qq} = 0$$

となるが, これは無分散 KP 方程式に他ならない (q, z が普通の書き方での y, t に相当する).

4 次元計量を u で表すこと

この次元簡約は Boyer と Finley による天界方程式の対称性（キリングベクトル）の分類の中で見落とされていた．対応する 4 次元計量を求めてみれば（これは無分散戸田方程式に比べれば計算量が少ない），

$$g = \frac{u_x}{2} ((dq)^2 - 4dx dz + 4u(dz)^2) - \frac{2}{u_x} \left(dy - \frac{u_x}{2} dz - u_q dz \right)^2$$

となる．この場合も Gibbons-Hawking 型計量と似た形にまとまるが，第 1 項の 3 次元計量が平坦ではないことは無分散戸田方程式と同様である．

3. 3 次元アインシュタイン・ワイル空間

以上のことはアインシュタイン・ワイル空間の概念 (Hitchin) とその共形的反自己双対時空の次元簡約としての特徴付け (Jones-Tod) の例になっている.

アインシュタイン・ワイル空間

多様体 W 上に計量 h の共形類 $[h]$ とねじれない接続 D が与えられていて, ある微分形式 ν に対して

$$Dh = \nu \otimes h \quad (\Longleftrightarrow D_i h_{jk} = \nu_i h_{jk})$$

という等式が成立するとき, 3つ組 $(W, [h], D)$ を **アインシュタイン・ワイル空間** という. この概念自体は任意次元で意味をもつが, 以下ではおもに 3次元の場合を考える.

注意

- (1) 上の条件は共形変換 $h \rightarrow \phi^2 h$, $\nu \rightarrow \nu + 2d \log \phi$ によって保たれる.
- (2) D は h のレビ・チビタ接続 ∇ と ν によって

$$D_i v^j = \nabla_i v^j - \frac{1}{2} (\delta_i^j \nu_k + \delta_k^j \nu_i - h_{ik} \nu^j) v^k$$

と表せるので, $(\mathcal{W}, [h], \nu)$ という 3 つ組をアインシュタイン・ワイル空間と呼ぶこともある.

- (3) 3次元アインシュタイン・ワイル空間に対して, $(++-)$ 型を想定して h を $h = (e^2)^2 - e^1 e^3$ と表す. このとき D から $\mathcal{W}$ 上の 1 次微分形式 $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ が決まり, $\mathcal{F} = \mathcal{W} \times \mathbb{CP}^1$ 上の全微分方程式系 $e^1 + e^2 \zeta + e^3 \zeta^2 = 0$, $d\zeta = \theta = \theta_0 + \theta_1 \zeta + \theta_2 \zeta^2$ は積分可能になる. その積分多様体全体の集合として **ミニツイスター空間** $\mathcal{Z}$ (2次元になる) が定義される. (ツイスター対応 $\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Z}$)

共形的反自己双対計量との関係 (Jones-Tod)

共形的反自己双対時空 (M, g) が共形的キリングベクトル K をもつならば, $W = M/K$ 上にアインシュタイン・ワイル構造 $([h], \nu)$ が決まる (具体的な形は省く). 逆に, 任意の 3 次元アインシュタイン・ワイル空間はそのようにして得られる. g は h によって

$$g = Vh \pm V^{-1}(dt + A)^2$$

と表せる. $\pm$ は h の符号に対応する ($+++$ ならば $+$, $++-$ ならば $-$). V は W 上の関数, A は W 上の 1 次微分形式であり, **一般化されたモノポール方程式**

$$*_h(dV + V\nu/2) = dA$$

を満たす.