非線型可積分系と準古典近似

京都大学総合人間学部　　高崎　金久

要旨：KP hierarchy とその仲間の非線型可積分系は一種の準古典極限をもつ．その意味は Baker-Akhiezer 函数や τ 函数（自由エネルギー）の準古典近似の形を与えることによって明快に説明できる．さらに KP hierarchy の対称性を記述する頂点作用素や Fermion ２次形式もまた準古典極限をもつことがわかる．これはすでに別の直接的な方法で得られていた結果を表現論および場の理論の立場から論じ直す手掛かりを与える．

１．それでは始めます

KP hierarchy は１変数の形式的擬微分作用素

$$L = \partial + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}\partial^{-n}, \quad \partial = \partial/\partial x \tag{1}$$

に対する Lax 方程式系

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L], \quad B_n \underset{\mathrm{def}}{=} (L^n)_{\geq 0}, n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

で与えられる．ここで $(\cdots)_{\geq 0}$ は ∂ の負巾部分を捨てて微分作用素の部分を取り出すことを意味する．方程式の独立変数は空間変数 x と無限個の時間変数 $t = (t_1, t_2, \ldots)$ であるが，t_1 は x と同一視してよい．未知函数は $g_2, u_3, \ldots$ であるが，それら各々 に対して Lax 方程式から導かれる発展方程式は有限個の項のみ含む代数的微分方程式で，収束の問題はない．こうして KP hierarchy は無限変数，無限連立微分方程式系として定式化される [1-3].

これに対して，以下で論じる準古典極限の KP hierarchy は１変数の形式的 Laurent 級数

$$\mathcal{L} = k + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} k^{-n} \tag{3}$$

に対する方程式系（これも Lax 方程式と呼ぶことにする）

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\}, \quad \mathcal{B}_n \underset{\mathrm{def}}{=} (\mathcal{L}^n)_{\geq 0}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

である．ここで $(\cdots)_{\geq 0}$ は今度は k の負巾を捨てて多項式をつくることを意味する．また $\{\quad,\quad\}$ は (k, x) に関する Poisson 括弧：

$$\{A(k,x), B(k,x)\} \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial A(k,x)}{\partial k}\frac{\partial B(k,x)}{\partial x} - \frac{\partial A(k,x)}{\partial x}\frac{\partial B(k,x)}{\partial k}. \tag{5}$$

つまり，これは KP hierarchy における擬微分作用素を symbol で置き換え，交換子を Poisson 括弧に変えたものである．しかしこの方程式は，交換子を Poisson 括弧で置き換えてみたらどうなるか，という単なる好奇心によって導入されたのではない．もともと非線型可積分系の研究の中では，非線型波動の長距離挙動を見るために分散項を落とす近似（無分散極限）として，このような方程式の存在が知られていたのである [4]．また最近の２次元量子重力理論（KP hierarchy が重要な役割を果たす）においては分配函数の種数展開という概念があるが [5]，その零種数部分がやはり上の方程式の解として理解できる [6]．また，少し異なる（しかし密接に関連する）文脈では位相的共形場と呼ばれるものとの関連も知られており [7]，その数学的意味についての研究が進んでいる [8,9].

このように特殊解はいろいろと知られているが，他方，方程式自体の構造はどうであろうか？擬微分作用素を symbol で置き換えたという意味では確かに準古典極限と呼ぶのはふさわしいが，これだけではもとの KP hierarchy の豊かな構造がどの様に反映されるのか（そもそも本当に反映されるのか）を見るのは容易でない．幸いにして，交換子のかわりに Poisson 括弧の現れる非線型可積分系の例がもう一つある．それは４次元の Einstein 方程式の自己双対解を記述する理論（自己双対重力）で，こちらはすでに詳しい解析がなされている [10-12]．それとの比較 + guess work によって，

上の準古典版 KP hierarchy がもとの KP hierarchy のよい性質をいろいろな形で受け継いでいることが明らかになっている [13]．しかしながらこの guess work の方法では KP hierarchy との対応が間接的にしか理解されない点で不満が残る．

以下では KP hierarchy に Planck 定数 $\hbar$ を導入して準古典極限をより直接的な形で取り扱う与える試みを紹介する．まず前半では，KP hierarchy に付随する線型方程式系の解（Baker-Akhiezer 函数）の準古典近似から上のような準古典的方程式が導かれること，τ 函数（あるいは自由エネルギー）も同様に扱えることを説明する．後半では，方程式の対称性についても，同様に頂点作用素や Fermion ２次形式に $\hbar$ 依存性を入れてうまく準古典極限が得られることを示す．このことに基づいて解の一般的表示式を導く．

２．Baker-Akhiezer 函数と τ 函数

ここで KP hierarchy のいくつかの基本的な道具立てについて説明する [1-3].

KP hierarchy は次の線型方程式系の Frobenius 可積分条件とみなすことができる．

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_n} = B_n \Psi, \quad \lambda \Psi = L \Psi, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

その解として次の形のもの（Baker-Akhiezer 函数）を考える．

$$\Psi = (1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \lambda^{-n}) \exp \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda^n \quad (t_1 = x). \tag{7}$$

(“Baker-Akhiezer 函数” という言葉はもともと KP hierarchy の特別な解 – 代数幾何学的な解 – の構成にあらわれる ψ を指していたが，最近は物理学者を中心に一般の場合にも平気で流用する風潮が見られるので，ここでもその言葉遣いにならう.）さらに右辺の指数函数の前の因子も対数をとって指数函数の形にまとめてしまえば

$$\Psi = \exp S(t, \lambda), \quad S(t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda^n + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n+1} \lambda^{-n}, \tag{8}$$

という表示を得る．この “位相函数” $S(t,\lambda)$ があとで準古典近似を考える際の基礎になる．

位相函数 $S(t,\lambda)$ を λ で微分して Laurent 展開する．

$$\frac{\partial S(t,\lambda)}{\partial\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} nt_n\lambda^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1}\lambda^{-n-1}, \quad v_{n+1} = -nS_{n+1}, \tag{9}$$

ここに現れる係数 h_{n+1} を用いて擬微分作用素

$$M \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} nt_n L^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1} L^{-n-1} \tag{10}$$

をつくる．これは M を Baker-Ahkiezer 函数に対して

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} = M\Psi \tag{11}$$

を満たすものとして定めるということに他ならない．さらに M は正準交換関係

$$[L, M] = 1 \tag{12}$$

に従い（その意味で L, M は量子論的に正準共役），また L と同じ形の Lax 方程式

$$\frac{\partial M}{\partial t_n} = [B_n, M], \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

を満たすこともわかる．KP hierarchy に内在する代数的諸構造を記述するには L だけでは不十分で，この (L, M) を一緒に扱う方がより完全な取り扱いができる [14].（KP hierarchy の従来の理論では

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n\partial^{-n}$$

という擬微分作用素が基本的な役割を演じたが，(L, M) 対はそれと同等の情報を持っている．準古典近似を考えるには (L, M) の方が便利である.]

τ 函数 $\tau(t)$ は Baker-Akhiezer 函数に対して

$$\Psi(t,\lambda) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\lambda^n)\exp(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\lambda^n}\frac{\partial}{\partial t_n})\tau(t)/\tau(t) \tag{14}$$

を満たすものとして定義できる（これによって $\tau(t)$ は定数倍を除いて一意的に決まる）．v_{n+1} を使えば

$$v_{n+1} = -np_n(-\tilde{\partial})\log\tau, \tag{15}$$

ここで $p_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ は多項式，$\tilde{\partial}$ は微分作用素の並びで，次のように定義されるもの：

$$\exp(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\lambda^n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\lambda^n, \qquad \tilde{\partial} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t_3}, \ldots\right).$$

3．準古典近似の処法

すでに知られている処法 [4] に従って Baker-Akhiezer 函数のレベルで準古典近似を導こう．まず Planck 定数 $\hbar$（単なる形式的パラメータである）を擬微分作用素や Baker-Akhiezer 函数の線型系の中に

$$\partial \to \hbar\partial, \quad \frac{\partial}{\partial t_n} \to \hbar\frac{\partial}{\partial t_n}, \quad \frac{\partial}{\partial\lambda} \to \hbar\frac{\partial}{\partial\lambda} \tag{16}$$

という置き換えで挿入しておく．それにあわせて g_{n+1}, h_{n+1} および B_n の展開

$$B_n = (\hbar\partial)^n + \sum_{i=0}^{n-2} b_{n,i}(\hbar\partial)^i$$

の係数もまた $\hbar$ に依存するとし，$\hbar \to 0$ において

$$\begin{aligned} &u_{n+1}(\hbar, t) = u_{n+1}^{(0)}(t) + O(\hbar), \quad v_{n+1}(\hbar, t) = v_{n+1}^{(0)}(t) + O(\hbar), \\ &b_{n,i}(\hbar, t) = b_{n,i}^{(0)}(t) + O(\hbar) \end{aligned} \tag{17}$$

という形をもつとする．

以上のことに伴って Baker-Ahkiezer 函数も然るべき $\hbar$ 依存性をもつことになる．上の $\hbar$ 挿入の仕方は通常の量子力学にならうものだから，Baker-Akhiezer 函数は量子力学の波動函数と同様の漸近形（WKB 近似）

$$\Psi(\hbar, t, \lambda) = \exp[\hbar^{-1}S(t, \lambda) + O(\hbar^0)] \tag{18}$$

をもつとしてよい.（準古典極限を導くにはこの最低次近似で十分である.）これを Baker-Akhierzer 函数に対する線型方程式に順に代入して行くと，形式的に以下のような形の eikonal 方程式（Hamilton-Jacobi 方程式）が得られる.

$$\frac{\partial S}{\partial t_n} = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-2} b_{n,i}^{(0)} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^i, \tag{19}$$

$$\lambda = \frac{\partial S}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}^{(0)} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{-n}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n t_n \lambda^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1}^{(0)} \lambda^{-n-1} \tag{21}$$

以下，記号の簡単のため添字の "$^{(0)}$" を省くことにしよう.

こうして得られた eikonal 方程式系が実は最初に述べた準古典版 KP hierarchy（正確には M に対応する Laurent 級数 $\mathcal{M}$ を導入して膨らませたもの）に同等なのである．それを見るには次の Legendre 変換により変数変換 $(t, \lambda) \to (t, k)$ を行う：

$$k = \frac{\partial S(t, \lambda)}{\partial x} \quad (x = t_1). \tag{22}$$

この式を λ について解いたものを

$$\lambda = \mathcal{L}(t, k) \tag{23}$$

と書いて，(t, k) の函数として $\mathcal{L}$ を定義すると，eikonal 方程式系の第 2 式から

$$\mathcal{L} = k + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} k^{-n} \tag{24}$$

となって，準古典版 KP hierarchy の $\mathcal{L}$ となるべき Laurent 展開をもつ．さらに (t, k) の函数 $\mathcal{S}(t, k)$, $\mathcal{B}_n(t, k)$, $\mathcal{M}(t, k)$ をそれぞれ

$$\mathcal{S}(t, k) = S(t, \lambda)|_{\lambda = \mathcal{L}}, \quad \mathcal{B}_n(t, k) = k^n + \sum_{i=0}^{n-2} b_{n,i} k^i,$$
$$\mathcal{M}(t, k) = \frac{\partial S(t, \lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda = \mathcal{L}} = \sum_{n=1}^{\infty} n t_n \mathcal{L}^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1} \mathcal{L}^{-n-1}, \tag{25}$$

で定義すると，残りの eikonal 方程式達は

$$d\mathcal{S} = \mathcal{M}d\mathcal{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n dt_n \tag{26}$$

という形にまとまる．これは準古典版 KP hierarchy の一般論の要をなす関係式で，前節で説明した KP hierarchy の拡大 Lax 形式に相当する次の方程式系と同等であることがわかっている [13].

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{M}\} \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ &\{\mathcal{L}, \mathcal{M}\} = 1. \end{aligned} \tag{27}$$

最後に τ 函数の準古典近似の形を与える．準古典版 KP hierarchy の τ 函数 $\tau_{\mathrm{q.c.}}(t) = \exp F(t)$ （$F(t)$ は自由エネルギー）は $\mathcal{M}$ の $\mathcal{L}$ による Laurent 展開の係数 h_{n+1} から方程式系

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t_n} = v_{n+1} \tag{28}$$

により定義される．τ 函数と Baker-Akhiezer 函数の関係式を以上の準古典近似の議論と見比べると，対応する τ 函数 $\tau(\hbar, t)$ は

$$\tau(\hbar, t) = \exp[\hbar^{-2}F(t) + O(\hbar^{-1})] \tag{29}$$

という漸近形をもたねばならない，という結論が出て来る．実は２次元量子重力理論では分配函数の種数展開の第０近似（零種数部分）がまさに上のような形で現れる [5]. $F(t)$ を自由エネルギーと呼ぶのはそこでの物理的解釈による．もちろん，今の話はそのような特殊解だけでなく，準古典版 KP hierarchy の一般解にも当てはまるものである.

４．頂点作用素の準古典極限

頂点作用素の概念はもともと物理で弦理論の研究において見いだされたものであるが，非線型可積分系の対称性を記述するものでもあることが明らか

になってから，無限次元 Lie 代数の研究の基本的な道具となっている．KP hierarchy ($\hbar = 1$) では次の形の頂点作用素が基本的である [3].

$$Z(\tilde{\lambda}, \lambda) = \frac{1}{\tilde{\lambda} - \lambda} \left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n (\tilde{\lambda}^n - \lambda^n) \right) \right.$$
$$\left. \cdot \exp\left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\lambda}^{-n} - \lambda^{-n})}{n} \frac{\partial}{\partial t_n} \right) - 1 \right]. \tag{30}$$

これは τ 函数に作用して KP hierarchy の解の空間上の無限小変換の２パラメータ族を与えることが知られている．さらに，$\tilde{\lambda} \to \lambda$ における Taylor 展開から以下のようにして二重添字をもつ無限個の無限小変換の生成子を得ることができる．まず

$$Z(\tilde{\lambda}, \lambda) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\lambda} - \lambda)^{\ell - 1}}{(\ell - 1)!} W^{(\ell)}(\lambda) \tag{31}$$

というように Taylor 展開して $W^{(\ell)}(\lambda)$ を取り出す．次にこれを今度は λ について

$$W^{(\ell)}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^{(\ell)} \lambda^{-n-\ell} \tag{32}$$

と Laurent 展開して $W_n^{(\ell)}$ ($\ell \geq 1$, $n \in \mathbf{Z}$) を定義する．これらの無限小変換 $W_n^{(\ell)}$ と恒等演算子１は閉じた Lie 代数（実質的には λ の Laurent 級数係数微分作用素の Lie 代数の１次元中心拡大）の交換関係に従うことが非線型可積分系の理論では以前から知られているが，最近は２次元量子重力の研究の中でも基本的な役割を演じるようになっている [15]．また，この代数は最近２，３年間に物理でよく用いられるようになってきた “$W_{1+\infty}$ 代数” の典型的な例でもある [16]．なお，$W_n^{(1)}$ 達は

$$W_n^{(1)} = \partial / \partial t_n, \quad W_{-n}^{(1)} = n t_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$W_0^{(1)} = 0 \tag{33}$$

となり，恒等演算子 1 と共に Heisenberg 代数（物理の言葉では U(1) カレント代数）に従う．また $W_n^{(2)}$ 達は Virasoro 代数に従う．

この $W_{1+\infty}$ 代数の構造をもつ対称性（$W_{1+\infty}$ 対称性）の準古典版は序説に触れたような guess work の方法で既に見いだされている [13]．一言でいえばそれは２変数 Poisson 代数の構造をもつ：

- いま $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ に関連して２変数 (λ, μ) を用意し，(k, x) に対する Poisson 括弧 $\{\quad,\quad\} = \{\quad,\quad\}_{k,x}$ と同様に $\{\quad,\quad\}_{\lambda,\mu}$ を考える．(λ, μ) の Laurent 単項式 $\lambda^{n+\ell-1}\mu^{\ell-1}$ ($\ell \geq 1$, $n \in \mathbf{Z}$) はこの Poisson 括弧に関して Lie 代数をなす.
- $F(t)$ の生成する微分代数（g_{n+1}, h_{n+1} などはすべてそこに属する）を考える．その上に働く新たな微分 $w_n^{(\ell)}$ を

$$w_n^{(\ell)} F = \frac{1}{\ell} \text{ res } \mathcal{M}^\ell \mathcal{L}^{n+\ell-1} d\mathcal{L} \tag{34}$$

  で定義する．ここで res は k の Laurent 級数係数の１次微分形式から dk/k の係数を取り出すことを意味する.（$k = \infty$ における留数の符号を変えたものと思えばよい.）実はこれが準古典版 KP hierarchy の無限小対称性を与える.
- これらの無限小対称性の満たす交換関係は (λ, μ) に関する上の Poisson 代数の１次元中心拡大に従う.

この Poisson 代数およびその１次元中心拡大は $W_{1+\infty}$ の一種の “縮約” である $w_{1+\infty}$ 代数に同型である．その意味で上の無限小対称性を $w_{1+\infty}$ 対称性と呼んでいる.

さて問題は KP hierarchy の $W_{1+\infty}$ 対称性と準古典版 KP hierarchy の $w_{1+\infty}$ 対称性を頂点作用素を介して直接に結び付けることである．これは次のようにしてできる：

- KP hierarchy に Planck 定数を挿入したやり方を思い出すと，頂点作用素 $Z(\tilde{\lambda}, \lambda)$ において変数の rescaling

$$t_n \to \hbar^{-1} t_n, \quad \frac{\partial}{\partial t_n} \to \hbar \frac{\partial}{\partial t_n} \tag{35}$$

  を施して得られる作用素 $Z(\hbar, \tilde{\lambda}, \lambda)$ が $\hbar$ を入れた KP hierarchy の頂点作用素になる．これから前と同様に Taylor 展開と Laurent 展開に

より $W_n^{(\ell)}(\hbar)$ をつくる（これは $W_n^{(\ell)}$ において上の rescaling を行ったものに等しい）.

- これを τ 函数

$$\tau(\hbar,t)=\exp[\hbar^{-2}F(t)+O(\hbar)]$$

に作用させる．このとき次の関係が成立する．

$$w_n^{(\ell)}F=\lim_{\hbar\to 0}\tau(\hbar,t)^{-1}\hbar^{\ell}W_n^{(\ell)}(\hbar)\tau(\hbar,t). \tag{36}$$

このようにして $W_{1+\infty}$ 対称性と $w_{1+\infty}$ 対称性の関係が明らかになった．

5．Fermion 2次形式と τ 函数の真空期待値表示

KP hierarchy の τ 函数は自由 Fermi 場の言葉を使って次のように真空期待値表示できることが知られている [3].

$$\tau(t)=<0|e^{H(t)}g|0> . \tag{37}$$

ここで用いている自由 Fermion の生成消滅演算子（数学の言葉では "作用素" であるが，それでは何となく気分が出ない）ψ_n,ψ_n^* は真空ベクトルと

$$\begin{aligned}\psi_n|0>&=0\ (n\le -1),\quad \psi_n^*|0>=0\ (n\ge 0),\\ <0|\psi_n&=0\ (n\ge 0),\quad <0|\psi_n^*=0\ (n\le -1),\end{aligned} \tag{38}$$

という関係にある．真空期待値表示の中に現れている 演算子 $H(t)$ は時間推進を担うもので,

$$H(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t_nH_n,\quad H_n=:\sum_{i=-\infty}^{\infty}\psi_i\psi_{i+n}^*: \tag{39}$$

で与えられる．:　: は真空 $<0|,|0>$ に関する正規積である．自由 Fermi 場

$$\psi(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_n\lambda^n,\quad \psi^*(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_n^*\lambda^{-n-1} \tag{40}$$

を導入しておくと，H_n 達は

$$H_n = \oint : \lambda^n \psi(\lambda)\psi^*(\lambda) : \frac{d\lambda}{2\pi i} \tag{41}$$

と書ける．g は適当な Clifford 演算子（Bogolioubov 変換を生成する）で，generic には

$$g = \mathrm{const.}\exp \int\int : A(\tilde{\lambda},\lambda)\psi(\tilde{\lambda})\psi^*(\lambda) : d\tilde{\lambda}d\lambda \tag{42}$$

と書けると思ってよい．$H(t)$ も g もともに Fermion ２次形式の指数函数の形をしていることに注意されたい．

頂点作用素 $Z(\tilde{\lambda},\lambda)$ の τ 函数への作用は g の前に Fermion ２次形式を挿入することに対応する：

$$Z(\tilde{\lambda},\lambda)\tau(t) =< 0|e^{H(t)} : \psi(\tilde{\lambda})\psi^*(\lambda) : g|0 > . \tag{43}$$

一般的に，g の前に Fermion ２次形式を挿入したものは KP hierarchy の無限小対称性を与える．たとえば，上の式を $\tilde{\lambda}$ について Taylor 展開すれば，KP hierarchy の $W_{1+\infty}$ 対称性を与える $W_n^{(\ell)}$ が次のような Fermion ２次形式に対応することがわかる．

$$\mathcal{O}_n^{(\ell)} \underset{\mathrm{def}}{=} \oint : \lambda^{n+\ell-1}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\ell-1}\psi(\lambda)\cdot\psi^*(\lambda) : \frac{d\lambda}{2\pi i} \tag{44}$$

準古典極限へ移行するには Planck 定数 $\hbar$ を入れた τ 函数の表示が必要である．これまでの議論からそれは t を $t \to \hbar^{-1}t$ というように rescale し g を $\hbar$ に依存する Clifford 演算子 $g(\hbar)$ に置き換えたもの

$$\tau(\hbar,t) =< 0|e^{H(t)/\hbar}g(\hbar)|0 > \tag{45}$$

になると期待される．問題は Clifford 演算子 $g(\hbar)$ をどのような形に選べば

$$\tau(\hbar,t) = \exp[\hbar^{-2}F(t) + O(\hbar^{-1})] \tag{46}$$

となるか？ということであるが，無限小対称性に関する考察からこの問題に対する解答を見いだすことができる．それについて以下で説明する．

すでに示したように，KP hierarchy の $W_{1+\infty}$ 対称性は適当に $\hbar$ を挿入して $\hbar \to 0$ の極限をとれば自然に準古典版 KP hierarchy の $w_{1+\infty}$ 対称性に縮約できる．たとえば $W_n^{(\ell)} \to w_n^{(\ell)}$ という縮約を行うには $\tau(\hbar, t)$ に $\hbar^\ell W_n^{(\ell)}(\hbar)$ を作用させてから $\tau(\hbar, t)$ で割って $\hbar \to 0$ とする．Fermion 2次形式でいえば $g(\hbar)$ の前に

$$\mathcal{O}_n^{(\ell)}(\hbar) \underset{\text{def}}{=} \oint : \lambda^{n+\ell-1} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^{\ell-1} \psi(\lambda) \cdot \psi^*(\lambda) : \frac{d\lambda}{2\pi i} \tag{47}$$

という Fermion 2次形式を $\hbar$ 倍して挿入することになる．このことから一般に

$$\mathcal{O}_A(\hbar) \underset{\text{def}}{=} \oint : A\left(\lambda, \hbar \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \psi(\lambda) \cdot \psi^*(\lambda) : \frac{d\lambda}{2\pi i} \tag{48}$$

という形の Fermion 2次形式が重要な意味をもつことがわかる．実際，これは準古典極限において準古典版 KP hierarchy の一般の形の $w_{1+\infty}$ 対称性

$$w_A F = \operatorname{res} A^\mu(\mathcal{L}, \mathcal{M}) d\mathcal{L}, \quad A^\mu(\lambda, \mu) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\mu A(\lambda, \tilde{\mu}) d\tilde{\mu}, \tag{49}$$

を与える．

ところでこの w_A は準古典版 KP hierarchy の無限小対称性であるからその解空間の上のベクトル場とみなせるのだが，もともとの Riemann-Hilbert 問題の方法による構成法 [13] をよく検討してみると，$A(\lambda, \mu)$ を変えて行くことでこれらのベクトル場は解空間の任意の点（たとえばある自明な解）において接空間を張ってしまうことがわかる．つまり，無限小の意味ではこれらの無限小変換の作用によりあらゆる解を生成することができる．そこでこの無限小変換を “積分” して有限変換を得ることができれば，任意函数データ $A(\lambda, \mu)$ をもつ generic な解（一般解）が得られることになる．

そのように無限小変換を “積分” することは τ 函数の真空期待値表示の中では簡単にできる．実際 g や $g(h)$ の前に挿入された Fermion 2次形式は無限小 Clifford 演算子に他ならず，それを指数函数の肩に乗せて有限の Clifford 演算子が得られるわけである．準古典版 KP hierarchy の解を

得るには上の $\mathcal{O}_A(\hbar)$ という形の Fermion 2次形式に対応する Clifford 演算子を $g(\hbar)$ として選べばよい．正確な定式化は次のようになる．

- Clifford 演算子 $g(h)$ を

  $$g(\hbar) = \exp \hbar^{-1}\mathcal{O}_A(\hbar) \tag{50}$$

  という形に選ぶとき，対応する τ 函数 $\tau(\hbar, t)$ は

  $$\tau(\hbar, t) = \exp[\hbar^{-2}F(t) + O(\hbar^{-1})] \quad (\hbar \to 0)$$

  という漸近形をもつ．

このようにして準古典版 KP hierarchy の（generic な）解を得ることができる．ただしこの真空期待値を具体的に計算することは別問題で，一般には級数展開のような手段しかない．しかしながら真空期待値というコンパクトな形に解が書けるということは大変重要なことである．

6．これで終わります

KP hierarchy とその準古典版を中心に，準古典極限の意味を説明してきた．Planck 定数をあらわに入れた KP hierarchy を考えることで，方程式のレベルでの準古典近似の意味が明らかになった．そこでは Baker-Akhiezer 函数に対する WKB 型の漸近形が本質的で，位相函数の満たす eikonal (Hamilton-Jacobi) 方程式を Legendre 変換したものが準古典版 KP hierarchy に他ならなかった．τ 函数（自由エネルギー）の準古典近似における意味も明確になった．さらに，方程式の対称性のレベルでも，頂点作用素や Fermion 2次形式に対する準古典近似の処方がわかり，KP hierarchy の $W_{1+\infty}$ 対称性から準古典版の $w_{1+\infty}$ 対称性への縮約が具体的に追跡できるようになった．それにより準古典版 KP hierarchy の一般解の場の理論的な表示に到達することができた．

同じような準古典版の方程式は modified KP hierarchy や Toda lattice hierarchy についても知られている．これらの方程式の特徴は t_n のような

連続変数以外に離散変数（整数に値をとる）を独立変数にもつことで，それを s とおくならば，準古典近似においてはこの離散変数も $s \to \hbar^{-1}s$ というように rescale されなければならない．その結果，$\hbar \to 0$ の極限ではこの変数は連続変数に化ける．それでも Baker-Akhiezer 函数，τ 函数ならびに $Z(\tilde{\lambda}, \lambda)$ に相当する頂点作用素の準古典近似の取扱いはまったく同様である．

Fermion 2次形式を巡る議論は多成分理論，すなわち Fermi 場が $\psi_\alpha(\lambda)$, $\psi^*_\alpha(\lambda)$, $\alpha = 1, \ldots, N$, というように複数個用意されている（あるいは内部自由度をもつ）場合にも拡張される．この場合の $W_{1+\infty}$ 代数は内部対称性を含む，より大きなものになる．KP hierarchy の理論ではこれは N-成分 KP hierarchy と呼ばれる状況にあたる．その場合の準古典極限の理論は Krichever [8] や Dubrovin [9] のいう Whitham hierarchy に他ならないようである．Whitham hierarchy はもともと KP hierarchy などの準周期解の摂動を記述するために導入されたものであるが，このように Fermi 場や頂点作用素の視点からも見直してみると面白いと思う．

さらに，N-成分理論に対する $N \to \infty$ の極限を考えることも興味ある問題である．物理学者によれば $\mathrm{sl}(N)$ などの内部対称性の代数は適当な $N \to \infty$ の極限において2次元の Poisson 代数やその量子変形である Weyl-Moyal 代数に化けるらしい [17]．従って N-成分 KP hierarchy の $N \to \infty$ 極限（それは準古典極限とも連動するだろう）はもともとの $W_{1+\infty}$ 代数や $w_{1+\infty}$ 代数（2次元の symplectic 多様体に関係している）に新たに2次元付け加わった4次元の symplectic 多様体を伴っていると考えられる．これは自己双対重力を始めとする高次元の可積分系の探索に重要な手がかりを提供するものと期待される．

参考文献

1] Sato, M., and Sato, Y., Soliton equations as dynamical systems in an infinite dimensional Grassmann manifold, in: *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Sciences* (North-Holland, Amsterdam, and Kinokuniya, Tokyo, 1982).

[2] Segal, G., and Wilson, G., Loop groups and equations of KdV type, Publ. IHES 61 (1985), 5-65.

[3] Date, E., Kashiwara, M., Jimbo, M., and Miwa, T., Transformation groups for soliton equations, in: *Nonlinear Integrable Systems — Classical Theory and Quantum Theory* (World Scientific, Singapore, 1983).
Jimbo, M., and Miwa, T., Solitons and infinite dimensional Lie algebras, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 19 (1983), 943-1001.

[4] Kodama, Y., A method for solving the dispersionless KP equation and its exact solutions, Phys. Lett. 129A (1988), 223-226; Solutions of the dispersionless Toda equation, Phys. Lett. 147A (1990), 477-482.
Kodama, Y., and Gibbons, J., A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions, II, Phys. Lett. 135A (1989), 167-170;

[5] Kaku, M., Strings, conformal fields, and topology (Springer-Verlag, 1991), Chapters 13 and 14.

[6] Yoneya, T., Toward a canonical formalism of non-perturbative two-dimensional gravity, Commun. Math. Phys. 144 (1992), 623-639.

[7] Dijkgraaf, R., Verlinde, H., and Verlinde, E., Topological strings in $d < 1$, Nucl. Phys. B352 (1991), 59-86.

[8] Krichever, I.M., The dispersionless Lax equations and topological minimal models, Commun. Math. Phys. 143 (1991), 415-426; The τ-function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories, LPTENS-92/18 (May, 1992).

[9] Dubrovin, B.A., Hamiltonian formalism of Whitham-type hierarchies and topological Landau-Ginsburg models, Commun. Math. Phys. 145 (1992), 195-207; Integrable systems and classification of 2-dimensional toplogical field theories, SISSA-162/92/FM (September, 1992).

[10] Boyer, C.P., and Plebanski, J.F., An infinite hierarchy of conservation laws and nonlinear superposition principles for self-dual Einstein spaces, J. Math. Phys. 26 (1985), 229-234.

[11] Takasaki, K., An infinite number of hidden variables in hyper-Kähler metrics, J. Math. Phys. 30 (1989), 1515-1521; Symmetries of hyper-Kähler (or Poisson gauge field) hierarchy, J. Math. Phys. 31 (1990), 1877-1888.

[12] Park, Q-Han, Self-dual gravity as a large-N limit of the 2D non-linear sigma model, Phys. Lett. 238B (1990), 287-290; Extended conformal symmetries in real heavens, Phys. Lett. 236B (1990), 429-432.

[13] Takasaki, K., and Takebe, T., SDiff(2) KP hierarchy, in: A. Tsuchiya, T. Eguchi and M. Jimbo (eds.), *Infinite Analysis*, (World Scientific, Singapore, 1992); SDiff(2) Toda equation – hierarchy, tau function

and symmetries, Lett. Math. Phys. 23 (1991), 205-214.

[14] Orlov, A.Yu., Vertex operators, $\bar{\partial}$-problems, symmetries, variational indentities and Hamiltonian formalism for $2+1$ integrable systems, in: V.G. Bar'yakhtar et al. (eds.), *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* (World Scientific, Singapore, 1987).
Grinevich, P.G., and Orlov, A.Yu., Virasoro action on Riemann surfaces, Grassmannians, $\det \bar{\partial}_j$ and Segal Wilson τ function, in: A. Belavin et al. (eds.), *Problems of modern quantum field theory* (Springer-Verlag, 1989).

[15] Fukuma, M., Kawai, H., and Nakayama, R., Infinite dimensional Grassmannian structure of two dimensional string theory, Commun. Math. Phys. 143 (1991), 371-403.
M. Adler and P. van Moerbeke, A matrix integral solution to two-dimensional W_p-gravity, Commun. Math. Phys. 147 (1992), 25-56.

[16] Bakas, I., The structure of the W_∞ algebra, Commun. Math. Phys. 134 (1990), 487-508.

[17] J. Hoppe, Lectures on integrable systems, Lecture Notes in Physics, Monograph series no. 10 (Springer-Verlag, 1992).