周期的Darboux鎖と周期的戸田格子の類似性

京都大学総合人間学部　高崎金久（Kenehisa Takasaki）

概 要

周期的 Darboux 鎖のさまざまな側面を調べて行くと，Lax 表示，スペクトル曲線，Hamilton 構造，Poisson 構造など至るところで周期的戸田格子に類似する性質や構造に出会う．ここではその一端を紹介する．

1　周期的 Darboux 鎖

Darboux 変換

$$(\partial_x - v_{n+1})(\partial_x + v_{n+1}) = (\partial_x + v_n)(\partial_x - v_n) + \alpha_n \tag{1}$$

（α_n は定数）で互いに結ばれた 2 階 Schrödinger 作用素

$$L_n = (\partial_x - v_n)(\partial_x + v_n) = \partial_x^2 - u_n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

の鎖を Darboux 鎖という（dressing 鎖とも呼ばれる [6, 7]）．Darboux 変換の式を v_n に対する微分方程式として書けば

$$\dot{v}_n + \dot{v}_{n+1} = v_{n+1}^2 - v_n^2 + \alpha_n \tag{2}$$

となる．ここでドットは x についての導関数 $\dot{v}_n = \partial_x v_n$ をあらわす．x は本来は空間変数であるが，ここではむしろ時間変数とみなし，Darboux 鎖をこの「運動方程式」に従う一種の非線形格子系として扱う．もっとも，この微分方程式 (2) は発展方程式の形をしていないので，運動方程式と呼ぶことにはいささか抵抗を感じる．

以下では周期的境界条件 $v_{n+N} = v_n$ を満たす場合を考える．Veselov と Shabat [10] が明らかにしているように，周期的 Darboux 鎖の性質は周期 N が奇数であるか偶数であるかによって大きく異なる．いずれの場合も

$$f_n = v_n + v_{n+1} \tag{3}$$

を新たな従属変数として x に関する発展方程式に書き直すことができる．[1]その意味で，周期的境界条件の下では Darboux 鎖は文字通りの意味で力学系と考えてよい．f_n で記述される力学系は野海と山田が「高次 Painlevé 方程式」として導入した次の非線形方程式系（以下，野海・山田系と呼ぶ）[4] に他ならない：

[1]Veselov と Shabat は N が偶数の場合にこの書き換えが困難を生じることを注意しているが，よく調べると実はうまく行くことがわかる．論文 [8] の改訂版で説明する予定.

1. $N=2g+1$ のとき

$$\dot{f}_n = f_n\left(\sum_{k=1}^{g} f_{n+2k-1} - \sum_{k=1}^{g} f_{n+2k}\right) + \alpha_n. \tag{4}$$

2. $N=2g+2$ のとき

$$\begin{aligned} v\dot{f}_n &= f_n\left(\sum_{1\le j\le k\le g} f_{n+2j-1}f_{n+2k} - \sum_{1\le j\le k\le g} f_{n+2j}f_{n+2k+1}\right) \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{g+1}\alpha_{n+2k-1} - \frac{\alpha}{2}\right) f_n + \alpha_n v. \end{aligned} \tag{5}$$

ただしここでは f_n は独立ではなく，

$$\sum_{k=1}^{g+1} f_{2k-1} = \sum_{k=1}^{g+1} f_{2k} \tag{6}$$

という束縛条件に従う．

方程式の中に登場した v と α はそれぞれ

$$v = \sum_{n=1}^{N} f_n, \quad \alpha = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \tag{7}$$

で定義される補助変数および定数である．(2) から

$$\dot{v} = \frac{\alpha}{2} \tag{8}$$

となることがわかるので，v は x の 1 次函数である．

周期的 Darboux 鎖の性質は α が零であるか否かによっても決定的に異なる．$\alpha=0$ のときには Schrödinger 作用素 L_n はいわゆる有限帯（あるいは有限間隙）作用素となり，超楕円函数であらわすことができる．他方，$\alpha \neq 0$ のときにはこの方程式は Painlevé 方程式の仲間であり，例外的な場合を除けば解はいわゆる「古典函数」の範疇には入らない（と考えられている）．特に $N=3,4$ の場合は，Veselov と Shabat [10] および V. Adler [1] が指摘したように，それぞれ IV 型および V 型の Painlevé 方程式と同値である．

以下では議論を $\alpha \neq 0$ の場合に限る．

2 Lax 表示とスペクトル曲線

Lax 表示には Adler [2] による 2×2 行列型のものと野海・山田 [5] による $N\times N$ 行列型のものがある．これらは「双対」の関係にあり，Mellin 変換で結ばれている [8]．

Adler の Lax 表示は周期性をもたない Darboux 鎖にもそのまま使えるもので，

$$\dot{V}_n(\lambda) = U_{n+1}(\lambda+\alpha_n)V_n(\lambda) - V_n(\lambda)U_n(\lambda) \tag{9}$$

という形をしている．ここで $V_n(\lambda)$ と $U_n(\lambda)$ は

$$V_n(\lambda) = \begin{pmatrix} v_n & 1 \\ \lambda + v_n^2 & v_n \end{pmatrix}, \quad U_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda + u_n & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

という行列である．周期的境界条件のもとで転移行列（transition matrix）

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} = V_N(\lambda + \beta_{N-1}) \cdots V_2(\lambda + \beta_1) V_1(\lambda) \tag{11}$$

（ここで $\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $\beta_0 = 0$）を導入すると，$T(\lambda)$ は

$$\dot{T}(\lambda) = U_1(\lambda + \alpha) T(\lambda) - T(\lambda) U_1(\lambda) \tag{12}$$

という Lax 方程式に従う．

$\alpha \neq 0$ の場合にはこの Lax 方程式は等スペクトル的ではないが，Heisenberg スピン鎖や戸田格子の場合にならって「スペクトル曲線」Γ を $T(\lambda)$ の固有方程式

$$\det(zI - T(\lambda)) = z^2 - \operatorname{Tr} T(\lambda) z + \det T(\lambda) = 0 \tag{13}$$

によって定義する．等スペクトル変形の場合と違ってこの曲線（超楕円曲線となる）も時間変化する．さらに，Γ 上の有限個の点 (λ_j, z_j)（$j = 1, \ldots, g$，g は曲線の種数）を

$$B(\lambda_j) = 0, \quad z_j = A(\lambda_j) \tag{14}$$

という条件で定めれば，$T(\lambda)$ の Lax 方程式はこれらの点の力学系，正確には

$$\dot{\lambda}_j = z_j \frac{\partial H}{\partial z_j}, \quad \dot{z}_j = -z_j \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \tag{15}$$

という形の非自励 Hamilton 系に翻訳される [8]．Hamiltonian H は λ_j, z_j と v（これが x に依存するので系は非自励系となる）の有理式であるが，その構造は戸田格子から同様の手順で得られる Hamilton 系とよく似ている．

他方，野海と山田の Lax 表示 [5] は

$$\dot{\mathcal{L}}(z) - \alpha z \mathcal{M}'(z) + [\mathcal{M}(z), \mathcal{L}(z)] = 0 \tag{16}$$

という形をしている．ここで $\mathcal{L}(z), \mathcal{M}(z)$ は

$$\mathcal{L}(z) = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ z & & & e_{N-1} & f_{N-1} \\ f_N z & z & & & e_N \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}(z) = \begin{pmatrix} v_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & v_N \end{pmatrix} \tag{17}$$

という行列であり，またプライムは z についての導函数 $\mathcal{M}'(z) = \partial_z \mathcal{M}(z)$ をあらわす．e_n は $\alpha_n = e_n - e_{n+1}$ という関係を満たす定数である．2×2 行列形式と違って，こちらは通常の意味で等モノドロミー変形の方程式である．

実は，あまり明らかではないが，$\mathcal{L}(z)$ の固有方程式 $\det(\lambda I - \mathcal{L}(z)) = 0$ は前述の Γ と実質的に同じ曲線を定める．すなわち

$$\det(zI - T(\lambda)) = 0 \iff \det((\lambda + e_1)I - \mathcal{L}(z)) = 0$$

ということが（ここで紹介するには長すぎる）一連の計算で示せる．これは前述の「双対性」の一つの顕れである．なお，同様のことが周期的戸田格子にも成立する．

3　三項漸化式とその応用

前節で触れたように，$T(\lambda)$ の最初の二つの行列要素 $A(\lambda), B(\lambda)$ は非自励 Hamilton 系 (15) の導出において基本的な役割を果たすが，野海・山田系との関連を見るには $A(\lambda)$ の代わりに

$$A(\lambda) = \tilde{A}(\lambda)\lambda + B(\lambda)v_1 \tag{18}$$

という等式で定義される多項式 $\tilde{A}(\lambda)$ を用いる方が都合がよい．$\tilde{A}(\lambda)$ は λ の多項式である（これ自体が証明を要することであるが）のみならず

$$\tilde{A}(\lambda) = \prod_{n=2}^{N-2}\left(1 + (\lambda + \beta_n)\frac{\partial^2}{\partial f_n \partial f_{n+1}}\right)(f_2 \cdots f_{N-1}). \tag{19}$$

という表示をもつことがわかる．さらに $B(\lambda)$ も

$$B(\lambda) = \prod_{n=1}^{N-2}\left(1 + (\lambda + \beta_n)\frac{\partial^2}{\partial f_n \partial f_{n+1}}\right)(f_1 \cdots f_{N-1}), \tag{20}$$

という表示をもつ．なお，これらは λ の多項式としては $N = 2g+1$, $N = 2g+2$ のいずれの場合も高々 g 次であって，

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= b_0\lambda^g + \cdots + b_g, \quad b_0 = 1\ (N = 2g+1),\ b_0 = v\ (N = 2g+2), \\ \tilde{A}(\lambda) &= \tilde{a}_0\lambda^g + \cdots + \tilde{a}_g, \quad \tilde{a}_0 = 0\ (N = 2g+1),\ \tilde{a}_0 = 1\ (N = 2g+2) \end{aligned} \tag{21}$$

という形をしている．以上のことについては論文 [8] を参照されたい．

このように，$A(\lambda)$ と違って，$\tilde{A}(\lambda)$ と $B(\lambda)$ はいずれも $f_1, \ldots, f_N$ によってあらわされている．これらの多項式を介して前述の非自励 Hamilton 系と野海・山田系の関係を見ることができる．実際，(14) を書き直せば

$$B(\lambda_j) = 0, \quad z_j = \tilde{A}(\lambda_j)\lambda_j \tag{22}$$

となる．λ_j, z_j はこれらの代数的関係式を満たすものとしても特徴づけられる（特に f_n 達の代数函数である）．ただし，逆に $\lambda_1, \ldots, \lambda_g, z_1, \ldots, z_g$ から f_n を再構成することができるかどうか（一種の「逆問題」）は決して明らかなことではない．この逆問題が解けて初めて，Hamilton 系 (15) は周期的 Darboux 鎖あるいは野海・山田系を書き直したものである，という主張が成り立つので，この問題を避けて通ることはできない．[2]

[2] $N = 2g+2$ の場合には一見 f_n の方が個数が多いように見えるが，f_n に対しては束縛条件 (6) を考慮し，λ_j, z_j には v を新たな変数として加えれば，どちらも独立な変数は $2g+1$ 個となって数勘定は合う．

この逆問題を考える際に，$\tilde{A}(\lambda)$ と $B(\lambda)$ を含む一連の多項式の三項漸化式が役に立つ．三項漸化式を満たす多項式は上の $\tilde{A}(\lambda), B(\lambda)$ の表示を素直に外挿したもの

$$F_m(\lambda) = \prod_{n=m}^{N-2}\left(1 + (\lambda + \beta_n)\frac{\partial^2}{\partial f_n \partial f_{n+1}}\right)(f_m \cdots f_{N-1}) \quad (m = 1, \ldots, N-2) \tag{23}$$

で与えられる．$m = N-1$ に対しては $F_{N-1}(\lambda) = f_{N-1}$ とおく．$\tilde{A}(\lambda) = F_2(\lambda)$, $B(\lambda) = F_1(\lambda)$ であることに注意されたい．$F_m(\lambda)$ の定義式を

$$\begin{aligned} F_m(\lambda) &= \left(1 + (\lambda + \beta_m)\frac{\partial^2}{\partial f_m \partial f_{m+1}}\right)(f_m F_{m+1}(\lambda)) \\ &= f_m F_{m+1}(\lambda) + (\lambda + \beta_m)\frac{\partial F_{m+1}(\lambda)}{\partial f_{m+1}} \end{aligned}$$

と変形してみれば，f_m を含むのは右辺の第１項だけだから

$$\frac{\partial F_m(\lambda)}{\partial f_m} = F_{m+1}(\lambda)$$

となる．これを上の式へ戻せば

$$F_m(\lambda) = f_m F_{m+1}(\lambda) + (\lambda + \beta_m) F_{m+2}(\lambda) \tag{24}$$

という三項漸化式が得られる．$F_N(\lambda) = 1$ と定めれば，この漸化式は $m = 1, \ldots, N-2$ の範囲で成立する．ちなみに，この三項漸化式から $F_m(\lambda)$ が

$$F_m(\lambda) = \begin{vmatrix} f_m & 1 & & \\ -\lambda - \beta_m & f_{m+1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -\lambda - \beta_{N-2} & f_{N-1} \end{vmatrix} \tag{25}$$

という行列式表示をもつこともわかる（野海・山田の Lax 表示の行列 $\mathcal{L}(z)$ が見えていることに注目されたい）．これらの多項式・三項漸化式は Moser [3] による非周期的有限戸田格子（戸田分子）の解法に登場するもの（戸田先生の教科書 [9] の３章 10 節に詳しい解説がある）とよく似ている．ここにも Darboux 鎖と戸田格子の類似性が見える．

この三項漸化式を利用して前述の逆問題が解くことができる．詳しくは論文 [8] の改訂版で説明する予定だが，結果として，f_n は $\lambda_1, \ldots, \lambda_g, z_1, \ldots, z, v$ の有理式となることがわかる．言い換えれば，代数的関係式 (22) は Hamilton 系 (15) の相空間と野海・山田系の相空間の間に（局所的に同型な）有理写像 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_g, z_1, \ldots, z_g, v) \mapsto (f_1, \ldots, f_N)$ を定めるのである．その証明の鍵は三項関係式 (24) から得られる等式

$$F_m(-\beta_m) = f_m F_{m+1}(-\beta_m) \tag{26}$$

にある．$F_m(\lambda), F_{m+1}(\lambda)$ を λ_j, z_j, v の有理式であらわすことができれば，この等式によって f_m も λ_j, z_j, v の有理式となり，さらに $F_{m+2}(\lambda)$ も

$$F_{m+2}(\lambda) = \frac{F_m(\lambda) - f_m F_{m+1}(\lambda)}{\lambda + \beta_m} \tag{27}$$

とあらわせて同様の有理式になることがわかる．$F_1(\lambda) = B(\lambda)$ と $F_2(\lambda) = \tilde{A}(\lambda)$ は (22) と Lagrange 補間公式によって λ_j, z_j, v の有理式としてあらわせるから，この論法で f_n が λ_j, z_j, v の有理式であることが順次従う．さらに，$N = 2g+2$ の場合に拘束条件 (6) の成立を確かめる，など細部の点検を行って証明が終わる．

なお，Moser による戸田分子の解法では連分数に対する Stieltjes の方法 [3, 9] が用いられるが，それはこの有理写像 $(\lambda_1, \dots, \lambda_g, z_1, \dots, z_g, v) \mapsto (f_1, \dots, f_N)$ に対応するものを具体的に構成することとみなせる．今の場合には $F_m(\lambda)$ の構造（行列式表示における λ の現れ方）が戸田分子の場合と異なるため Stieltjes の方法は使えない．

$F_m(\lambda)$ の三項漸化式のもう一つの応用として，Hamilton 系 (15) の相空間のシンプレクティック構造と野海・山田系の相空間の Poisson 構造 [10, 4] の関係を明らかにすることもできるが，許された紙数もそろそろ尽きるのでここでは説明を省く．詳しくは改定中の論文 [8] を参照されたい．

参考文献

[1] V.E. Adler, Cutting of polygons, Funct. Anal. Appl. **27**, 141–143.

[2] V.E. Adler, Nonlinear chains and Painlevé equations, Physica **D73** (1994), 335–351.

[3] J. Moser, Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential — an integrable system, in *Dynamical Systems, Theory and Applications*, J. Moser (ed.), Lect. Notes. Phys. vol. 38, (Springer-Verlag, 1975), 467–497.

[4] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type $A_\ell^{(1)}$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 483–503.

[5] M. Noumi and Y. Yamada, Affine Weyl group symmetries in Painlevé type equations, in: C.J. Howls, T. Kawai and Y. Takei (eds.), *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, pp. 245–259 (Kyoto University Press, Kyoto, 2000).

[6] A.B. Shabat, The infinite-dimensional dressing dynamical system, Inverse Problems **6** (1992), 303–308.

[7] A.B. Shabat and R.I. Yamilov, Symmetries of nonlinear chains, Leningrad Math. J. **2** (1991), 377–400.

[8] K. Takasaki, Spectral curve, Darboux coordinates and Hamiltonian structure of periodic dressing chains, arXiv:nlin.SI/0206049. 2003 年 2 月現在，大幅改訂中.

[9] 戸田盛和，非線形格子力学，岩波書店 1978 年.

[10] A.P. Veselov and A.B. Shabat, Dressing chains and the spectral theory of the Schrödinger operator, Funct. Anal. Appl. **27** (1993), 81–96.