

非線形 Schrödinger 階層と Ablowitz-Ladik 階層の 対数的時間発展による拡張

高崎金久 (Kanehisa Takasaki)
京都大学大学院人間・環境学研究科

1 はじめに

Carlet, Dubrovin, Zhang は通常の 1 次元戸田階層に「対数的」時間発展を加えて「拡張戸田階層」を構成した [1]. Milanov はこの拡張戸田階層に対して双線形形式を与えた [2]. ところで, 1 次元戸田階層は非線形 Schrödinger (NLS) 階層の Bäcklund 変換列 (NLS-戸田階層) とも見なせる [3]. 同様の意味で Ruijsenaars-戸田階層 (RT 階層) は Ablowitz-Ladik (AL) 階層と対応していることが知られている [4, 5, 6]. 以下では, 拡張戸田階層を NLS-戸田階層の言葉に翻訳したものが NLS 階層の 2+1 次元拡張に似ていることに注目し, その場合にならって双線形方程式が得られることを指摘する. こうして得られる双線形方程式は Milanov の双線形方程式を特別な場合として含んでいる. さらに AL 階層に対しても同様の結果を報告する.

2 拡張戸田階層から拡張 NLS-戸田階層へ

1 次元戸田階層の Lax 表示 1 次元戸田階層は差分型 Lax 作用素

$$\mathcal{L} = e^{\partial_s} + b(s) + c(s)e^{-\partial_s}$$

によって

$$\partial_{t_n} \mathcal{L} = [A_n, \mathcal{L}], \quad A_n = \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{\geq 0} - \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{< 0} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と Lax 表示される. ここで $(\)_{\geq 0}$ と $(\)_{< 0}$ は e^{∂_s} に関する非負べき部分・負べき部分を表す.

Lax 作用素の対数 \mathcal{L} に対して

$$\mathcal{L} = \mathcal{W}e^{\partial_s}\mathcal{W}^{-1} = \bar{\mathcal{W}}e^{-\partial_s}\bar{\mathcal{W}}^{-1}$$

という等式を満たす着付け (dressing) 作用素

$$\mathcal{W} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k e^{-k\partial_s}, \quad \bar{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{w}_k e^{k\partial_s}$$

を導入すれば, \mathcal{L} の対数 $\log \mathcal{L}$ を

$$\log \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{W}\partial_s\mathcal{W}^{-1} - \frac{1}{2}\bar{\mathcal{W}}\partial_s\bar{\mathcal{W}}^{-1}$$

と定義することができる．この定義式は

$$\log \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial s} \mathcal{W}^{-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\mathcal{W}}}{\partial s} \bar{\mathcal{W}}^{-1}$$

と書き直せるが，ここには ∂_s が e^{∂_s} の形でのみ現れるので， $\log \mathcal{L}$ は（無限階ではあるが）とにかく差分作用素であることがわかる．

拡張戸田階層 1次元戸田階層の Lax 方程式系に $\mathcal{L}^n \log \mathcal{L}$ の生成する時間発展（対数的時間発展）の Lax 方程式系

$$\partial_{x_n} \mathcal{L} = [\mathcal{B}_n, \mathcal{L}], \quad \mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n \log \mathcal{L})_{\geq 0} - (\mathcal{L}^n \log \mathcal{L})_{< 0} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を付け加えて得られる階層（2系列の時間変数 $t = (t_1, t_2, \dots)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ をもつ）を拡張戸田階層という．

注意: Carlet らの本来の定義 [1] では $\mathcal{L}^n \log \mathcal{L}$ の代わりに $\mathcal{L}^n (\log \mathcal{L} - c_n)$ ($c_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$) を用いる．ここでは c_n を落としているが，可積分構造に関して本質的な違いはない．

波動関数と 関数 標準的な記号

$$\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n, \quad [z] = (z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{3}, \dots),$$

を導入する．拡張戸田階層の波動関数は

$$\Phi(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z) = \mathcal{W} z^{s+\xi(\mathbf{x}, z)} e^{\xi(\mathbf{t}, z)/2}, \quad \bar{\Phi}(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z) = \bar{\mathcal{W}} z^{s+\xi(\mathbf{x}, z)} e^{-\xi(\mathbf{t}, z^{-1})/2}$$

という形をもち（本来の1次元戸田階層における z^s が $z^{s+\xi(\mathbf{x}, z)}$ に変わることには注意），補助線形方程式系

$$\begin{aligned} L\Phi &= z\Phi, \quad \partial_{t_n} \Phi = \mathcal{A}_n \Phi, \quad \partial_{x_n} \Phi = \mathcal{B}_n \Phi, \\ L\bar{\Phi} &= z^{-1}\bar{\Phi}, \quad \partial_{t_n} \bar{\Phi} = \mathcal{A}_n \bar{\Phi}, \quad \partial_{x_n} \bar{\Phi} = \mathcal{B}_n \bar{\Phi} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

を満たす．関数 $\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t})$ は波動関数を

$$\begin{aligned} \Phi(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z) &= \frac{\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t})} z^{s+\xi(\mathbf{x}, z)} e^{\xi(\mathbf{t}, z)/2}, \\ \bar{\Phi}(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z) &= \frac{\tau(s+1, \mathbf{x}, \mathbf{t} + [z])}{\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t})} z^{s+\xi(\mathbf{x}, z)} e^{-\xi(\mathbf{t}, z^{-1})/2} \end{aligned}$$

と表示するものとして導入される．関数には \mathbf{x} のみの関数 $e^{f(\mathbf{x})}$ を乗じる不定性 $\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}) \rightarrow e^{f(\mathbf{t})} \tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t})$ がある．

行列型波動関数と Lax 方程式系 スカラー値波動関数 $\Phi(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z), \bar{\Phi}(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z)$ から行列値波動関数

$$\Psi(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z) = W(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z) \text{diag}(z^{s+\xi(\mathbf{x}, z)} e^{\xi(\mathbf{t}, z)/2}, z^{-s-\xi(\mathbf{x}, z)} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)/2})$$

をつくる．ここで $W(s, \mathbf{x}, \mathbf{t})$ は

$$W(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z) = \begin{pmatrix} \frac{\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t})} & \frac{z^{-1} \tau(s+1, \mathbf{x}, \mathbf{t} + [z^{-1}])}{\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t})} \\ \frac{z^{-1} \tau(s-1, \mathbf{x}, \mathbf{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t})} & \frac{\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t} + [z^{-1}])}{\tau(s, \mathbf{x}, \mathbf{t})} \end{pmatrix}$$

という行列である． $\Psi(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z)$ は以下の各方程式を満たすことがわかる．

(1) 代数的条件 $\det W(s, \mathbf{x}, \mathbf{t}, z) = 1$

(2) 補助線形方程式系

$$e^{\partial_s} \Psi = L\Psi, \quad \partial_{t_n} \Psi = A_n \Psi, \quad \partial_{x_n} \Psi = z^n \partial_s \Psi + B_n \Psi \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ここで L, A_n, B_n は

$$L = \begin{pmatrix} z - \partial_{t_1} \log \frac{\tau(s+1, \mathbf{t})}{\tau(s, \mathbf{t})} & -\frac{\tau(s+1, \mathbf{t})}{\tau(s, \mathbf{t})} \\ \frac{\tau(s, \mathbf{t})}{\tau(s+1, \mathbf{t})} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_n = \left(W \operatorname{diag} \left(\frac{z^n}{2}, -\frac{z^n}{2} \right) W^{-1} \right)_{\geq 0}, \quad B_n = - (z^n \partial_s W \cdot W^{-1})_{\geq 0}$$

という行列である ($\operatorname{diag}(a, b)$ は a, b を対角成分とする対角行列を表す) .

この補助線形方程式に対応して L は格子型 Lax 方程式系

$$\partial_{t_n} L(s) = A_n(s+1)L(s) - L(s)A_n(s),$$

$$\partial_{x_n} L(s) = z^n \partial_s L(s) + B_n(s+1)L(s) - L(s)B_n(s) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(s 依存性のみを強調している) を満たす . また A_n, B_n は零曲率方程式を満たす . 特に , A_1, A_n, B_n が満たす零曲率方程式は

$$[\partial_{t_n} - A_n, \partial_{t_1} - A_1] = 0, \quad [\partial_{x_n} - z^n \partial_s - B_n, \partial_{t_1} - A_1] = 0$$

という形になるが , 前者は NLS 階層の零曲率方程式に他ならない (L の Lax 方程式はその Bäcklund 変換列が満たす方程式と見なせる) 後者は NLS 階層の $2+1$ 次元拡張 [7, 8] の方程式に似ている . $2+1$ 次元拡張では s とは独立な空間変数 y が用意されていて , $z^n \partial_s$ の代わりに $z^n \partial_y$ が現れる .

双線形方程式 NLS 階層の $2+1$ 次元拡張の場合 [8] にならって波動函数とその逆行列に対して

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^k \Psi(s' - \xi(\mathbf{b}, z), \mathbf{x} + \mathbf{b}, \mathbf{t}', z) \Psi(s - \xi(\mathbf{a}, z), \mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{t}, z)^{-1} = 0 \quad (k \geq 0)$$

($s, s', \mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t}, \mathbf{t}'$ は任意の値をとる) という双線形方程式を導くことができる . これから 函数に対する双線形方程式

$$\begin{aligned} & \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{k+s'-s} e^{\xi(\mathbf{t}'-\mathbf{t}, z)/2} \tau(s' - \xi(\mathbf{b}, z), \mathbf{x} + \mathbf{b}, \mathbf{t}' - [z^{-1}]) \\ & \quad \times \tau(s - \xi(\mathbf{a}, z), \mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{t} + [z^{-1}]) \\ & = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{k+s-s'-2} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)/2} \tau(s' + 1 - \xi(\mathbf{b}, z), \mathbf{x} + \mathbf{b}, \mathbf{t}' + [z^{-1}]) \\ & \quad \times \tau(s - 1 - \xi(\mathbf{a}, z), \mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{t} - [z^{-1}]) \quad (k \geq 0) \end{aligned}$$

が得られる . これは Milamov が拡張戸田階層に対して与えた双線形方程式 [2] (じつは証明が間違っているようである) を特別な場合として含んでいる .

3 Ablowitz-Ladik 階層

ここでは Vekslerchik [9] による AL 階層の定式化に従って話を進める .

Lax 方程式系 AL 階層は 2 系列の時間変数 $t = (t_1, t_2, \dots)$, $\bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots)$ をもち, 2×2 行列

$$L = \begin{pmatrix} \zeta & q(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) \\ r(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \quad (\zeta \text{ はスペクトルパラメータである})$$

に対する格子型 Lax 方程式系

$$\begin{aligned} \partial_{t_n} L(s) &= A_n(s+1)L(s) - L(s)A_n(s), \\ \partial_{\bar{t}_n} L(s) &= \bar{A}_n(s+1)L(s) - L(s)\bar{A}_n(s) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

で定義される. $A_n = A_n(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta)$, $\bar{A}_n = \bar{A}_n(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta)$ はそれぞれ ζ, ζ^{-1} の多項式からなる行列で, 対角成分が ζ の偶関数, 非対角成分が ζ の奇関数である. 具体的な形は後で述べる.

波動関数 補助線形問題

$$e^{\partial_s} \Psi = L\Psi, \quad \partial_{t_n} \Psi = A_n \Psi, \quad \partial_{\bar{t}_n} \Psi = \bar{A}_n \Psi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

に対して 2 種類の 2×2 行列値波動関数

$$\begin{aligned} \Psi(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta) &= W(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta) \text{diag}(\zeta^s e^{\xi(\mathbf{t}, \zeta^2)}, \zeta^{-s} e^{\xi(\bar{\mathbf{t}}, \zeta^{-2})}), \\ \bar{\Psi}(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta) &= \bar{W}(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta) \text{diag}(\zeta^s e^{\xi(\bar{\mathbf{t}}, \zeta^{-2})}, \zeta^{-s} e^{\xi(\mathbf{t}, \zeta^2)}) \end{aligned}$$

が導入される. $W(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta)$ と $\bar{W}(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta)$ はそれぞれ ζ^{-1}, ζ の整級数からなる行列であり, ζ に関して A_n, \bar{A}_n と同様の奇偶性をもち, 代数的条件

$$\det W(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta) = \det \bar{W}(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta) = \frac{\tau(s+1, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})}{\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})}$$

を満たす.

A_n, \bar{A}_n の構造 一般に A_n, \bar{A}_n と同様の奇偶性をもつ Laurent 級数の行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \gamma(\zeta) & \delta(\zeta) \end{pmatrix}$

に対して $(A)_{\pm}$ を

$$(A)_+ = \begin{pmatrix} (\alpha)_{\geq 0} & (\beta)_{\geq 1} \\ (\gamma)_{\geq 1} & (\delta)_{\geq 2} \end{pmatrix}, \quad (A)_- = \begin{pmatrix} (\alpha)_{\leq -2} & (\beta)_{\leq -1} \\ (\gamma)_{\leq -1} & (\delta)_{\leq 0} \end{pmatrix}$$

と定義する. 行列要素に対する $(\)_{\geq k}$, $(\)_{\leq k}$ はそれぞれ ζ^j ($j \geq k$), ζ^j ($j \leq k$) の部分を取り出すことを意味する. この記号を用いれば, A_n, \bar{A}_n は W, \bar{W} によって

$$A_n = (W \text{diag}(\zeta^{2n}, 0)W^{-1})_+, \quad \bar{A}_n = (\bar{W} \text{diag}(\zeta^{-2n}, 0)\bar{W}^{-1}z)_-$$

と表せる.

函数 3 個の 函数 $\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$, $\sigma(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$, $\bar{\sigma}(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ が

$$\begin{aligned} W(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta) &= \begin{pmatrix} \frac{\tau(s, \mathbf{t} - [\zeta^{-2}], \bar{\mathbf{t}})}{\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})} & -\frac{\zeta^{-1}\sigma(s+1, \mathbf{t} + [\zeta^{-2}], \bar{\mathbf{t}})}{\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})} \\ \frac{\zeta^{-1}\bar{\sigma}(s, \mathbf{t} - [\zeta^{-2}], \bar{\mathbf{t}})}{\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})} & \frac{\tau(s+1, \mathbf{t} + [\zeta^{-2}], \bar{\mathbf{t}})}{\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})} \end{pmatrix}, \\ \bar{W}(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \zeta) &= \begin{pmatrix} \frac{\tau(s+1, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}} - [\zeta^2])}{\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})} & \frac{\zeta\sigma(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}} + [\zeta^2])}{\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})} \\ -\frac{\zeta\bar{\sigma}(s+1, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}} - [\zeta^2])}{\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})} & \frac{\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}} + [\zeta^2])}{\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という等式を満たすものとして導入される.

双線形方程式 行列型波動函数 $\Psi(s, t, \bar{t}, \zeta)$ は双線形方程式に相当する方程式として

$$\Psi(s', t', \bar{t}', \zeta) \Psi(s, t, \bar{t}, \zeta)^{-1} = \bar{\Psi}(s', t', \bar{t}', \zeta) \bar{\Psi}(s, t, \bar{t}, \zeta)^{-1}$$

を満たす．これは通常の Riemann-Hilbert 問題の形をしているが，

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^k \Psi(s', t', \bar{t}', \zeta) \Psi(s, t, \bar{t}, \zeta)^{-1} = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^k \bar{\Psi}(s', t', \bar{t}', \zeta) \bar{\Psi}(s, t, \bar{t}, \zeta)^{-1} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

という形に書き直せば，すでに述べた拡張 NLS-戸田階層の双線形方程式と同類である．また，Vekslerchik が $\tau, \sigma, \bar{\sigma}$ に対して与えた函数等式 [9] もこの方程式の中に含まれている．

4 拡張 Ablowitz-Ladik 階層：AL 階層に対数的時間発展を導入する

対数的時間発展 新たに 2 系統の時間変数 $x = (x_1, x_2, \dots)$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$ を用意し，NLS-戸田階層の拡張にならって x, \bar{x} の時間発展に関する補助線形方程式系

$$\partial_{x_n} \Psi = \zeta^{2n} \partial_s \Psi + B_n \Psi, \quad \partial_{\bar{x}_n} \Psi = \zeta^{-2n} \partial_s \Psi + \bar{B}_n \Psi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を追加する．ここで

$$B_n = -(\zeta^{2n} \partial_s W \cdot W^{-1})_+, \quad \bar{B}_n = -(\zeta^{-2n} \partial_s \bar{W} \cdot \bar{W}^{-1})_-.$$

() $_{\pm}$ の意味は A_n, \bar{A}_n の表示式の場合と同じである． B_n, \bar{B}_n はそれぞれ ζ, ζ^{-1} の多項式からなる行列であり， ζ に関して A_n, \bar{A}_n と同じ奇偶性をもつ．なお， s とは独立な空間変数 y を導入して $\zeta^{\pm 2n} \partial_s$ を $\zeta^{\pm 2n} \partial_y$ に置き換えれば，AL 階層の 2+1 次元拡張が得られる．

これらの時間発展の導入に伴って 2 種類の波動函数 $\Psi, \bar{\Psi}$ は

$$\begin{aligned} \Psi(s, x, \bar{x}, t, \bar{t}, \zeta) &= W(s, x, \bar{x}, t, \bar{t}, \zeta) \\ &\times \text{diag}(\zeta^{s+\xi(x, \zeta^2)+\xi(\bar{x}, \zeta^{-2})} e^{\xi(t, \zeta^2)}, \zeta^{-s-\xi(x, \zeta^2)-\xi(\bar{x}, \zeta^{-2})} e^{\xi(\bar{t}, \zeta^{-2})}), \\ \bar{\Psi}(s, x, \bar{x}, t, \bar{t}, \zeta) &= \bar{W}(s, x, \bar{x}, t, \bar{t}, \zeta) \\ &\times \text{diag}(\zeta^{s+\xi(x, \zeta^2)+\xi(\bar{x}, \zeta^{-2})} e^{\xi(\bar{t}, \zeta^{-2})}, \zeta^{-s-\xi(x, \zeta^2)-\xi(\bar{x}, \zeta^{-2})} e^{\xi(t, \zeta^2)}) \end{aligned}$$

という形に変わる (ζ^s が $\zeta^{s+\xi(x, \zeta^2)+\xi(\bar{x}, \zeta^{-2})}$ に置き換わる)． W, \bar{W} の満たす代数的条件は変わらない：

$$\det W(s, x, \bar{x}, t, \bar{t}, \zeta) = \det \bar{W}(s, x, \bar{x}, t, \bar{t}, \zeta) = \frac{\tau(s+1, x, \bar{x}, t, \bar{t})}{\tau(s, x, \bar{x}, t, \bar{t})}$$

また， $\tau, \sigma, \bar{\sigma}$ による W, \bar{W} の表示式も変わらない．

双線形方程式 x, \bar{x} に関する時間発展は 2+1 次元拡張と類似する構造をもつ．このことから，波動函数に対する函数等式型方程式

$$\begin{aligned} &\Psi(s' - \xi(b, \zeta^2) - \xi(\bar{b}, \zeta^{-2}), x + b, \bar{x} + \bar{b}, t', \bar{t}', \zeta) \\ &\quad \times \Psi(s - \xi(a, \zeta^2) - \xi(\bar{a}, \zeta^{-2}), x + a, \bar{x} + \bar{a}, t, \bar{t}, \zeta)^{-1} \\ &= \bar{\Psi}(s' - \xi(b, \zeta^2) - \xi(\bar{b}, \zeta^{-2}), x + b, \bar{x} + \bar{b}, t', \bar{t}', \zeta) \\ &\quad \times \bar{\Psi}(s - \xi(a, \zeta^2) - \xi(\bar{a}, \zeta^{-2}), x + a, \bar{x} + \bar{a}, t, \bar{t}, \zeta)^{-1} \end{aligned}$$

($s, s', a, b, \bar{a}, \bar{b}, x, x', t, t', \bar{t}, \bar{t}$ は任意の値をとる) が得られる．さらにこれから $\tau, \sigma, \bar{\sigma}$ に対する双線形方程式が得られる．

5 まとめと展望

- 拡張戸田階層は1次元戸田階層に対数的時間発展の系列を付け加えたものである。これを 2×2 行列形式に書き直して拡張 NLS-戸田階層を得た。
- 拡張 NLS-戸田階層は NLS 階層の $2 + 1$ 次元拡張と似た構造をもつ。そのことを手がかりにして波動函数と 函数に対する双線形方程式を導いた。これは Milanov の主張を別の形で確かめたことになる。
- 拡張 NLS-戸田階層にならって AL 階層の対数的時間発展による拡張 (拡張 AL 階層) を構成し、波動函数と 函数に対する双線形方程式を導いた。
- 以上の結果はベクトル値の場合 (ベクトル値 NLS 階層) などにも一般化できるだろう。

参考文献

- [1] G. Carlet, B. Dubrovin, Y. Zhang, The extended Toda hierarchy, *Moscow Math. J.* **4** (2004), 313–332.
- [2] T. Milanov, Hirota quadratic equations for the extended Toda hierarchy, *Duke. Math. J.* **138** (2008), 161–178.
- [3] A.P.E. ten Kroode and M.J. Bergvelt, The homogeneous realization of the basic representation of $A_1^{(1)}$ and the Toda lattice, *Lett. Math. Phys.* **12** (1986), 139–147.
- [4] S. Kharchev, A. Mironov and A. Zhedanov, Faces of relativistic Toda chain, *Int. J. Mod. Phys.* **A12** (1997), 2675–2724.
- [5] Yu.B. Suris, A note on the integrable discretization of the nonlinear Schrödinger equation, *Inverse Problems* **13** (1997), 1121–1136.
- [6] T. Sadakane, Ablowitz-Ladik Hierarchy and 2-component Toda Lattice Hierarchy, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 87–97.
- [7] I.A.B. Strachan, A new family of integrable models in $(2 + 1)$ -dimensions associated with Hermitian symmetric spaces, *J. Math. Phys.* **33** (1992), 2477–2482.
- [8] S. Kakei, T. Ikeda and K. Takasaki, Hierarchy of $(2 + 1)$ -dimensional nonlinear Schrödinger equations, self-dual Yang-Mills equation, and toroidal Lie algebras, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 817–845.
- [9] V.E. Vekslerchik, Functional representation of the Ablowitz-Ladik hierarchy, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 1087–1099; ditto II, *J. Nonlin. Math.* **9** (2002), 157–180.