対数的時間発展による非線形 Schrödinger 階層と Ablowitz-Ladik 階層の拡張

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

2009 年 11 月 20 日

Carlet, Dubrovin, Zhang は通常の１次元戸田階層に「対数的」時間発展を加えて「拡張戸田階層」を構成した．Milanov はこの拡張戸田階層に対して双線形形式を与えた．ところで，１次元戸田階層は非線形 Schrödinger（NLS）階層の Bäcklund 変換列（NLS-戸田階層）とも見なせる．同様の意味で Ruijsenaars-戸田階層（RT 階層）は Ablowitz-Ladik（AL）階層と対応していることが知られている．本講演では，１次元戸田階層の対数的時間発展を NLS-戸田階層の言葉に翻訳し，その結果が AL 階層に拡張できることを示す.

1．１次元戸田階層＝NLS-戸田階層：知られていることの要約

２次元戸田階層からの簡約

- ２次元戸田階層の τ 函数に対して簡約条件

$$(\partial_{t_n} + \partial_{\bar{t}_n})\tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) = 0 \ (n = 1, 2, \ldots)$$

をおけば，τ 函数は $\tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) = \tau(s, \boldsymbol{t} - \bar{\boldsymbol{t}})$ と表せて１系列の時間変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$ に依存する τ 函数 $\tau(s, \boldsymbol{t})$ が残る．

- Lax 表示は差分作用素 $\mathcal{L} = e^{\partial_s} + b(s) + c(s)e^{-\partial_s}$ によって

$$\partial_{t_n}\mathcal{L} = [\mathcal{A}_n, \mathcal{L}], \quad \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{\geq 0} - \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{<0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

という形で与えられる．ここで $(\quad)_{\geq 0}$ と $(\quad)_{<0}$ は e^{∂_s} に関する非負べき部分・負べき部分を表す．

波動函数

- この簡約によって 2 次元戸田階層の波動函数の対は

$$\Phi(s,\boldsymbol{t},z)=\frac{\tau(s,\boldsymbol{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{t})}z^s e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2},\ \bar{\Phi}(s,\boldsymbol{t},z)=\frac{\tau(s+1,\boldsymbol{t}+[z])}{\tau(s,\boldsymbol{t})}z^s e^{-\xi(\boldsymbol{t},z^{-1})/2}$$

に帰着する．ここで $\xi(\boldsymbol{t},z)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n z^n$, $[z]=(z,\frac{z^2}{2},\frac{z^3}{3},\ldots)$.

- 2×2 行列型の Lax 表示を与えるために，$\Phi(s,\boldsymbol{t},z),\bar{\Phi}(s,\boldsymbol{t},z^{-1})$ を 1 行目に，それらを $s\to s-1$ とずらしてゲージ変換したものを 2 行目に並べて 2×2 行列型波動函数をつくる：

$$\Psi(s,\boldsymbol{t},z)=W(s,\boldsymbol{t},z)\,\mathrm{diag}(z^s e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2},\ z^{-s}e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)/2}),$$

$$W(s,\boldsymbol{t},z)=\begin{pmatrix}\dfrac{\tau(s,\boldsymbol{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{t})} & \dfrac{z^{-1}\tau(s+1,\boldsymbol{t}+[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{t})}\\ \dfrac{z^{-1}\tau(s-1,\boldsymbol{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{t})} & \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{t}+[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{t})}\end{pmatrix}.$$

行列型波動函数の満たす方程式

$\Psi(s,\boldsymbol{t},z)$ は以下の条件・方程式を満たす.

(1) 代数的条件 $\det W(s,\boldsymbol{t},z)=1$

(2) 補助線形方程式系

$$e^{\partial_s}\Psi = L\Psi, \quad \partial_{t_n}\Psi = A_n\Psi \quad (n=1,2,\ldots),$$

$$L = \begin{pmatrix} z-\partial_{t_1}\log\frac{\tau(s+1,\boldsymbol{t})}{\tau(s,\boldsymbol{t})} & -\frac{\tau(s+1,\boldsymbol{t})}{\tau(s,\boldsymbol{t})} \\ \frac{\tau(s,\boldsymbol{t})}{\tau(s+1,\boldsymbol{t})} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_n = \left(W\,\mathrm{diag}(z^n/2,-z^n/2)W^{-1}\right)_{\geq 0}.$$

ここで $(\quad)_{\geq 0}$ は z に関する多項式部分を表す.

(3) 双線形方程式

$$\oint\frac{dz}{2\pi i}z^k\Psi(s',\boldsymbol{t}',z)\Psi(s,\boldsymbol{t},z)^{-1}=0 \quad (k\geq 0).$$

NLS-戸田階層

- (2) から L に対する格子型 Lax 方程式系

$$\partial_{t_n} L(s) = A_n(s+1)L(s) - L(s)A_n(s)$$

が得られる．これは 1 次元戸田階層を NLS 階層の Bäcklund 変換列として定式化したもの（NLS-戸田階層）になっている．

- (3) は τ 函数に対する双線形方程式

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{k+s'-s} e^{\xi(\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t},z)/2} \tau(s', \boldsymbol{t}' - [z^{-1}])\tau(s, \boldsymbol{t} + [z^{-1}])$$
$$= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{k+s-s'-2} e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}',z)/2} \tau(s'+1, \boldsymbol{t}'+[z^{-1}])\tau(s-1, \boldsymbol{t}-[z^{-1}]) \quad (k \geq 0)$$

（$s, s', \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}'$ は任意の値をとる）に対応している．この方程式は 2 次元戸田階層の双線形方程式から直接に導くこともできる（そこから (1) も従う）．

2．拡張戸田階層：Milanov の主張を見直す

Lax 作用素の対数

波動函数対 $\Phi(s,\boldsymbol{t},z), \bar{\Phi}(s,\boldsymbol{t},z)$ から着付け（dressing）作用素
$\mathcal{W} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k e^{-k\partial_s}$, $\bar{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{w}_n e^{k\partial_s}$ を

$$\Phi(s,\boldsymbol{t},z) = \mathcal{W} z^s e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2}, \ \bar{\Phi}(s,\boldsymbol{t},z) = \bar{\mathcal{W}} z^s e^{-\xi(\boldsymbol{t},z^{-1})/2}$$

によって導入し，それを用いて $\mathcal{L}$ の対数 $\log\mathcal{L}$ を

$$\log\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{W}\partial_s\mathcal{W}^{-1} - \frac{1}{2}\bar{\mathcal{W}}\partial_s\bar{\mathcal{W}}^{-1}$$

と定義する.（$\mathcal{L}$ 自体は $\mathcal{L} = \mathcal{W}e^{\partial_s}\mathcal{W}^{-1} = \bar{\mathcal{W}}e^{-\partial_s}\bar{\mathcal{W}}^{-1}$ と表せる.）

$$\log\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial s}\mathcal{W}^{-1} + \frac{1}{2}\frac{\partial\bar{\mathcal{W}}}{\partial s}\bar{\mathcal{W}}^{-1}$$

と書き直せばわかるように，∂_s は e^{∂_s} の形でのみ現れるので，$\log\mathcal{L}$ は（無限階ではあるが）差分作用素である.

拡張戸田階層

１次元戸田階層の Lax 方程式系

$$\partial_{t_n}\mathcal{L} = [\mathcal{A}_n, \mathcal{L}],\ \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{\geq 0} - \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{<0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

に $\mathcal{L}^n \log \mathcal{L}$ の生成する Lax 方程式系

$$\partial_{x_n}\mathcal{L} = [\mathcal{B}_n, \mathcal{L}],\ \mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n \log \mathcal{L})_{\geq 0} - (\mathcal{L}^n \log \mathcal{L})_{<0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を付け加えて得られる階層（２系列の時間変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ をもつ）を拡張戸田階層という.

注意　Carlet, Dubrovin, Zhang の本来の定義では $\mathcal{L}^n \log \mathcal{L}$ の代わりに $\mathcal{L}^n(\log \mathcal{L} - c_n)$ （$c_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$）を用いる．ここでは c_n を落としているが，これは時間発展全体の階層の中で線形変換を行うことに過ぎないから，可積分構造に関して本質的な違いはない.

波動函数と τ 函数

• 1 次元戸田階層の波動函数対 $\Phi, \bar{\Phi}$ は拡張戸田階層においては

$$\Phi(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z) = \mathcal{W} z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)} e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2}, \quad \bar{\Phi}(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z) = \bar{\mathcal{W}} z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)} e^{-\xi(\boldsymbol{t},z^{-1})/2}$$

という形をとる（z^s が $z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)}$ に変わったことに注意）.

• $\boldsymbol{x}$ の存在を無視して 1 次元戸田階層としての時間発展にみに注目すれば,

$$\Phi(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z) = \frac{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)} e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2},$$

$$\bar{\Phi}(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z) = \frac{\tau(s+1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}+[z])}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)} e^{-\xi(\boldsymbol{t},z^{-1})/2}$$

という等式が成立するように τ 函数 $\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ を導入できる（$\boldsymbol{x}$ のみの函数 $e^{f(\boldsymbol{x})}$ を乗じること $\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \to e^{f(\boldsymbol{t})}\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ が不定性として残る）. Milanov はこの τ 函数に対して双線形方程式を導いている（証明は間違っているようだが）.

行列型波動函数

１次元戸田階層を 2×2 行列形式に書き直したことにならって,
$\Phi(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z), \bar{\Phi}(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z)$ から行列型波動函数

$$\Psi(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z) = W(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z)\,\mathrm{diag}(z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2},\ z^{-s-\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)/2}),$$

$$W(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} & \dfrac{z^{-1}\tau(s+1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}+[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} \\ \dfrac{z^{-1}\tau(s-1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} & \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}+[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} \end{pmatrix}$$

をつくる. $\Psi(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z)$ は以下の各方程式を満たすことがわかる.

(1) 代数的条件 $\det W(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z) = 1$

(2) 補助線形方程式系

$$e^{\partial_s}\Psi = L\Psi,\ \partial_{t_n}\Psi = A_n\Psi,\ \partial_{x_n}\Psi = z^n\partial_s\Psi + B_n\Psi \quad (n=1,2,\ldots),$$

$$A_n = \left(W\,\mathrm{diag}(z^n/2,-z^n/2)W^{-1}\right)_{\geq 0}, \quad B_n = -\left(z^n\partial_s W\cdot W^{-1}\right)_{\geq 0}.$$

NLS 階層の 2+1 次元拡張との類似性

$\boldsymbol{x}$ の時間発展に関する補助線形方程式系 $\partial_{x_n}\Psi = z^n\partial_s\Psi + B_n\Psi$ はいわゆる 2+1 次元拡張の補助線形方程式に似ている．NLS 階層の 2+1 次元拡張では NLS 階層に新たに空間変数 y を導入し，それに伴う時間発展 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ の補助線形方程式として

$$\partial_{x_n}\Psi = z^n\partial_y\Psi + B_n\Psi, \quad B_n = -(z^n\partial_y W \cdot W^{-1})_{\geq 0}$$

というものを考える．s 変数の存在する NLS-戸田階層においても同様の 2+1 次元拡張が考えられる．その場合の波動函数は

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^k \Psi(s', y - \xi(\boldsymbol{b}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}', z)\Psi(s, y - \xi(\boldsymbol{a}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t}, z)^{-1} = 0 \quad (k \geq 0)$$

という双線形方程式を満たす（そこから τ 函数に対する双線形方程式も得られる）．今考えている設定はいわば y と s が同じものになった場合と見なせるので，2+1 次元拡張の場合にならって，次に示すような双線形方程式が得られる．

双線形方程式

波動函数は

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^k \Psi(s' - \xi(\boldsymbol{b}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}', z)\Psi(s - \xi(\boldsymbol{a}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t}, z)^{-1} = 0 \quad (k \geq 0)$$

（$s, s', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}'$ は任意の値をとる）という形の双線形方程式を満たす．これから τ 函数に対する双線形方程式

$$\begin{aligned}
&\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{k+s'-s} e^{\xi(\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t}, z)/2} \tau(s' - \xi(\boldsymbol{b}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}' - [z^{-1}]) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \tau(s - \xi(\boldsymbol{a}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t} + [z^{-1}]) \\
&= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{k+s-s'-2} e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}', z)/2} \tau(s' + 1 - \xi(\boldsymbol{b}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}' + [z^{-1}]) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \tau(s - 1 - \xi(\boldsymbol{a}, z), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t} - [z^{-1}]) \quad (k \geq 0)
\end{aligned}$$

が得られる．これは Milanov の双線形方程式を少し一般的に書き直したものになっているが，実際には同値である．

3．Ablowitz-Ladik 階層：Vekslerchik による定式化

Lax 方程式系

AL 階層は 2 系列の時間変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$, $\bar{\boldsymbol{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots)$ をもち，2×2 行列 $L = \begin{pmatrix} \zeta & q(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) \\ r(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$ （ζ はスペクトルパラメータである）に対する格子型 Lax 方程式系

$$\partial_{t_n} L(s) = A_n(s+1)L(s) - L(s)A_n(s),$$
$$\partial_{\bar{t}_n} L(s) = \bar{A}_n(s+1)L(s) - L(s)\bar{A}_n(s)$$

で定義される．$A_n = A_n(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)$, $\bar{A}_n = \bar{A}_n(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)$ はそれぞれ ζ, ζ^{-1} の多項式からなる行列で，次の奇偶性条件を満たす：

$$A_n(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, -\zeta) = \mathrm{diag}(1, -1) A_n(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)\, \mathrm{diag}(1, -1),$$
$$\bar{A}_n(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, -\zeta) = \mathrm{diag}(1, -1) \bar{A}_n(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)\, \mathrm{diag}(1, -1)$$

波動函数

このLax方程式系に対応する補助線形問題

$$e^{\partial_s}\Psi = L\Psi,\ \partial_{t_n}\Psi = A_n\Psi,\ \partial_{\bar{t}_n}\Psi = \bar{A}_n\Psi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

に対して2種類の 2×2 行列値波動函数

$$\Psi(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = W(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)\,\mathrm{diag}(\zeta^s e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)}, \zeta^{-s} e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}),$$

$$\bar{\Psi}(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = \bar{W}(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)\,\mathrm{diag}(\zeta^s e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}, \zeta^{-s} e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)})$$

が導入される．$W(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)$ と $\bar{W}(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)$ はそれぞれ ζ^{-1}, ζ の整級数からなる行列であり，$\zeta \to -\zeta$ に関して $A_n, \bar{A}_n$ と同様の奇偶性をもち，さらに代数的条件

$$\det W(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = \det \bar{W}(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = \frac{\tau(s+1, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})}$$

を満たす.

$A_n, \bar{A}_n$ の構造

一般に奇遇性条件 $A(-\zeta) = \mathrm{diag}(1,-1)A(\zeta)\,\mathrm{diag}(1,-1)$ を満たす Laurent 級数の行列 $A(\zeta) = \begin{pmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \gamma(\zeta) & \delta(\zeta) \end{pmatrix}$ に対して $(A)_\pm$ を

$$(A)_+ = \begin{pmatrix} (\alpha)_{\geq 0} & (\beta)_{\geq 1} \\ (\gamma)_{\geq 1} & (\delta)_{\geq 2} \end{pmatrix},\ (A)_- = \begin{pmatrix} (\alpha)_{\leq -2} & (\beta)_{\leq -1} \\ (\gamma)_{\leq -1} & (\delta)_{\leq 0} \end{pmatrix}$$

と定義する．行列要素に対する $(\quad)_{\geq k}$, $(\quad)_{\leq k}$ はそれぞれ ζ^j $(j \geq k)$, ζ^j $(j \leq k)$ の部分を取り出すことを意味する．この記号を用いれば，$A_n, \bar{A}_n$ は $W, \bar{W}$ によって

$$A_n = \left(W\,\mathrm{diag}(\zeta^{2n}, 0)W^{-1}\right)_+, \quad \bar{A}_n = \left(\bar{W}\,\mathrm{diag}(\zeta^{-2n}, 0)\bar{W}^{-1}z\right)_-$$

と表せる．

τ 函数

3 個の τ 函数 $\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$, $\sigma(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$, $\bar{\sigma}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ が

$$W(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)=\begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{t}-[\zeta^{-2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & -\dfrac{\zeta^{-1}\sigma(s+1,\boldsymbol{t}+[\zeta^{-2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \\ \dfrac{\zeta^{-1}\bar{\sigma}(s,\boldsymbol{t}-[\zeta^{-2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & \dfrac{\tau(s+1,\boldsymbol{t}+[\zeta^{-2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \end{pmatrix},$$

$$\bar{W}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)=\begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s+1,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}-[\zeta^{2}])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & \dfrac{\zeta\sigma(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}+[\zeta^{2}])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \\ -\dfrac{\zeta\bar{\sigma}(s+1,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}-[\zeta^{2}])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}+[\zeta^{2}])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \end{pmatrix}$$

という等式を満たすものとして導入される.

双線形方程式

行列型波動函数 $\Psi(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)$ は双線形方程式に相当する方程式として

$$\Psi(s',\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}',\zeta)\Psi(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)^{-1} = \bar{\Psi}(s',\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}',\zeta)\bar{\Psi}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)^{-1}$$

を満たす．これから $\tau,\sigma,\bar{\sigma}$ に対する双線形方程式が得られる．

注意　NLS-戸田階層の双線形方程式やその $s=0$ の場合である NLS 階層の双線形方程式

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^k \Psi(\boldsymbol{t}',z)\Psi(\boldsymbol{t},z)^{-1} = 0 \quad (k \geq 0)$$

と違ってこれは周回積分の形をしていないが，NLS 階層を PLR (Pohlmeyer-Lund-Regge) 階層（2次元戸田階層と同様に2系列の時間変数をもつ）に埋め込んだ場合には，行列型波動函数はこれと同様の函数等式型方程式を満たす．これらの方程式はいわゆる Riemann-Hilbert 問題として扱うことができる．

4. 拡張 Ablowitz-Ladik 階層：AL 階層に対数的時間発展を導入する

対数的時間発展

新たに 2 系統の時間変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$ を用意し，NLS-戸田階層の拡張にならって $\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}$ の時間発展に関する補助線形方程式系

$$\partial_{x_n}\Psi = \zeta^{2n}\partial_s\Psi + B_n\Psi,\ \partial_{\bar{x}_n}\Psi = \zeta^{-2n}\partial_s\Psi + \bar{B}_n\Psi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を追加する．ここで

$$B_n = -\left(\zeta^{2n}\partial_s W \cdot W^{-1}\right)_+, \quad \bar{B}_n = -\left(\zeta^{-2n}\partial_s \bar{W} \cdot \bar{W}^{-1}\right)_- .$$

$(\quad)_\pm$ の意味は $A_n, \bar{A}_n$ の表示式の場合と同じである．$B_n, \bar{B}_n$ はそれぞれ ζ, ζ^{-1} の多項式からなる行列であり，ζ に関して $A_n, \bar{A}_n$ と同じ奇偶性をもつ.

拡張 AL 階層に関する結果の概略

1) $\Psi, \bar{\Psi}$ は

$$\Psi(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = W(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)$$
$$\times \operatorname{diag}(\zeta^{s+\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)+\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})} e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)}, \zeta^{-s-\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})} e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}),$$
$$\bar{\Psi}(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = \bar{W}(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)$$
$$\times \operatorname{diag}(\zeta^{s+\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)+\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})} e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}, \zeta^{-s-\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})} e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)})$$

という形に変わる（$\zeta^{\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)+\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}$ という因子の出現に注意）.

2) $W, \bar{W}$ の満たす代数的条件は変わらない：

$$\det W(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = \det \bar{W}(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta) = \frac{\tau(s+1, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})}$$

3) $\tau, \sigma, \bar{\sigma}$ による $W, \bar{W}$ の表示式は変わらない.

4) $\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}$ に関する時間発展は 2+1 次元拡張と類似する構造をもつ．このことに注目すれば，波動函数に対する函数等式型方程式

$$
\begin{aligned}
&\Psi(s' - \xi(\boldsymbol{b}, \zeta^2) - \xi(\bar{\boldsymbol{b}}, \zeta^{-2}), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{t}', \bar{\boldsymbol{t}}', \zeta) \\
&\qquad \times \Psi(s - \xi(\boldsymbol{a}, \zeta^2) - \xi(\bar{\boldsymbol{a}}, \zeta^{-2}), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)^{-1} \\
= &\bar{\Psi}(s' - \xi(\boldsymbol{b}, \zeta^2) - \xi(\bar{\boldsymbol{b}}, \zeta^{-2}), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{t}', \bar{\boldsymbol{t}}', \zeta) \\
&\qquad \times \bar{\Psi}(s - \xi(\boldsymbol{a}, \zeta^2) - \xi(\bar{\boldsymbol{a}}, \zeta^{-2}), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \zeta)^{-1}
\end{aligned}
$$

（$s, s', \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}', \bar{\boldsymbol{t}}, \bar{\boldsymbol{t}}$ は任意の値をとる）が得られる．さらにこれから $\tau, \sigma, \bar{\sigma}$ に対する双線形方程式が得られる．

まとめと展望

- 拡張戸田階層は 1 次元戸田階層に対数的時間発展の系列を付け加えたものである．これを 2×2 行列形式に書き直して拡張 NLS-戸田階層を得た.

- 拡張 NLS-戸田階層は NLS 階層の 2+1 次元拡張と似た構造をもつ. そのことを手がかりにして波動函数と τ 函数に対する双線形方程式を導いた．これは Milanov の主張を別の形で確かめたことになる.

- 拡張 NLS-戸田階層にならって AL 階層の対数的時間発展による拡張（拡張 AL 階層）を構成し，波動函数と τ 函数に対する双線形方程式を導いた.

- 以上の結果はいわゆるベクトル値 NLS 階層（に離散変数を導入したもの）などにも一般化できるだろう.