複雑系札幌研究会

超準解析から見た実数上の計算可能性の概念

京都大学 高崎金久

* $\mathbb{N}$上の計算論と$\mathbb{R}$上の計算論
(デジタル vs. アナログ)

* 超準解析の枠組による$\mathbb{R}$上の計算論
(辻下 北大講義録)

* 気になる問題
(この数は計算可能か?
アナログはデジタルを越えるのか?)

$\mathbb{N}$ 上の計算論と $\mathbb{R}$ 上の計算論

$\mathbb{N}$ 上の計算論

（デジタル計算）

$\mathbb{R}$ 上の計算論

（アナログ計算）

モデルは様々あるが

本質は一つ

(Church - Turing thesis)

- Turing 機械
- λ計算
- 帰納的函数
- ⋮

本質的に異なる

枠組がある

- Grzegorczyk ('50年代)

  計算可能数

  計算可能函数

  Pour-El, Richards ('70年代〜)

  解析学における

  計算(不)可能な対象

- Blum, Shub, Smale ('80年代)

  帰納的函数,

  帰納的集合, 計算量

  Julia 集合などへの応用

- 辻下 (北大講義)

  超準数学の枠組

疑問：

本質的な差はあるのか？

枠組(見方)によって

答が異なるようだ.

超準解析の枠組による $\mathbb{R}$ 上の計算論

Ref. 辻下，北大における講義の資料

標準モデル		超準（非標準）モデル
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	$\cdots\cdots\to$	$\underbrace{{}^*\mathbb{N}, {}^*\mathbb{Z}}_{\text{無限大数を含む}}, \underbrace{{}^*\mathbb{R}}_{\text{無限大・無限小数を含む}}$
$f(x)$ 関数, $P(x)$ 述語	$\cdots\cdots\to$	${}^*f(x)$, ${}^*P(x)$ 拡張がある.

- 特に，整数部分 $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ に対して拡張 ${}^*[\cdot] : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{Z}$ がある．（以下単に $[\cdot]$ と書く．）

- $x \simeq y \underset{\text{定義}}{\iff} x - y$ が無限小

$\downarrow$

無限小解析（微積分）の再構成

例．微分方程式 $\longrightarrow$ 無限小差分方程式

積分 $\longrightarrow$ 和（超有限和）

$\mathbb{R}$上の計算可能函数

無限大

非標準的自然数 η を ひとつえらぶ。

?
選び方によらないことの検証は？

$\varepsilon = 1/\eta$ とおく。 ← 無限小

$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$N(x) = \left[\frac{x}{\varepsilon}\right] \in {}^*\mathbb{Z}$$

とおく。 ($x \simeq N(x)\varepsilon$ となる)

この写像 $x \mapsto N(x)$ により
$\mathbb{N}$上の計算可能函数 (の ${}^*\mathbb{N}$ への拡張)
で表現できるものを $\mathbb{R}$上の計算可能函数という：—

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が計算可能

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists F : \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z}$ 計算可能 (帰納的)

$$f(x_1, \cdots, x_n) \simeq F(N(x_1), \cdots, N(x_n), \varepsilon^{-1})\varepsilon$$

? $n = 0$ でもよいのか？

定数の計算可能性 ？ (あとで問題になる)