複雑系札幌研究会

超準解析から見た
実数上の計算可能性
の概念

京都大学 高崎金久

* $\mathbb{N}$ 上の計算論と $\mathbb{R}$ 上の計算論
(デジタル vs. アナログ)

* 超準解析の枠組による $\mathbb{R}$ 上の計算論
(辻下 北大講義録)

* 気になる問題
(この数は計算可能か?
アナログはデジタルを越えるのか?)

$\mathbb{N}$ 上の計算論と $\mathbb{R}$ 上の計算論

$\mathbb{N}$ 上の計算論 (デジタル計算)	$\mathbb{R}$ 上の計算論 (アナログ計算)
モデルは様々あるが 本質は一つ (Church-Turing thesis)	本質的に異なる 枠組がある

- Turing 機械
- λ計算
- 帰納的函数
- ⋮

- Grzegorczyk ('50年代)
  計算可能数
  計算可能函数

  Pour-El, Richards ('70年代〜)
  解析学における
  計算(不)可能な対象

- Blum, Shub, Smale ('80年代)
  帰納的函数,
  帰納的集合, 計算量
  Julia 集合などへの応用

- 辻下 (北大講義)
  超準数学の枠組

疑問:
本質的な差はあるのか?

枠組(見方)によって
答が異なるようだ.

超準解析の枠組による $\mathbb{R}$ 上の計算論

Ref. 辻下，北大における講義の資料

標準モデル		超準（非標準）モデル
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	$\cdots\cdots\to$	${}^*\mathbb{N}, {}^*\mathbb{Z}, {}^*\mathbb{R}$
		${}^*\mathbb{N}, {}^*\mathbb{Z}$：無限大数を含む　${}^*\mathbb{R}$：無限大・無限小数を含む
$f(x)$ 函数 $P(x)$ 述語	$\cdots\cdots\to$	${}^*f(x)$ ${}^*P(x)$ 拡張がある．

- 特に，整数部分 $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ に対して拡張 ${}^*[\cdot] : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{Z}$ がある．（以下単に $[\cdot]$ と書く．）

- $x \simeq y \overset{\text{定義}}{\iff} x - y$ が無限小

$\downarrow$

無限小解析（微積分）の再構成

例．微分方程式 $\longrightarrow$ 無限小差分方程式

積分 $\longrightarrow$ 和（超有限和）

$\mathbb{R}$上の計算可能函数

無限大

非標準的自然数 η を ひとつえらぶ。 ? 選び方によらないことの検証は？

$\varepsilon = 1/\eta$ とおく。 ← 無限小

$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$N(x) = \left[\frac{x}{\varepsilon}\right] \in {}^*\mathbb{Z}$$

とおく。 ($x \simeq N(x)\varepsilon$ となる)

この写像 $x \mapsto N(x)$ により
$\mathbb{N}$上の計算可能函数 (の ${}^*\mathbb{N}$ への拡張)
で表現できるものを $\mathbb{R}$上の計算可能函数という：—

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が 計算可能

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists F : \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z}$ 計算可能 (帰納的)

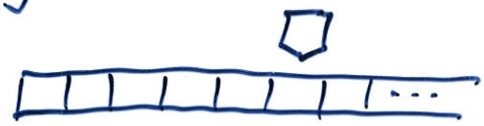
$$f(x_1, \cdots, x_n) \simeq F(N(x_1), \cdots, N(x_n), \varepsilon^{-1})\varepsilon$$

? $n = 0$ でもよいのか？

定数の計算可能性 ？ (あとで問題になる)

標準的 Turing機械を非標準的に使う

$F \longleftrightarrow$ Turing machine



$\rightsquigarrow$ ${}^*\mathbb{N}$ あるいは ${}^*\mathbb{Z}$ へ transfer.

わかること

- 計算可能関数の四則演算の結果は計算可能
- 計算可能関数からなる常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

の初期値問題の解は計算可能関数.

? Pour-El, Richards の結果 ('79) との関係は?

- 「$x = 0$」という述語は計算可能でない.

気になる問題

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は 単射 ($a(n) \neq a(m)$ if $n \neq m$) な帰納的関数で、像 $A = \{a(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が $\mathbb{N}$の帰納的部分集合でないものとする。（存在する。）

↑ Aの補集合 $\overline{A} = \mathbb{N} \setminus A$ を同様に表わすことができない

これを使って次の実数をつくる：—

$$\boxed{c = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-a(n)}}$$

特徴：

cの10進小数展開

$$c = 0.c_1 c_2 \cdots \qquad c_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

の各桁 $c_1, c_2, \cdots$ を逐次計算して出力するような関数は存在しない。あるいは、同じことだが、

$$g(0) = 0$$
$$g(n) = c_1 \cdots c_n \quad (n \geqq 1)$$

という関数 $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は計算可能ではない。

（注：Grzegorczykの意味での計算不可能数になっている。
Pour-El, Richardsはこの数を巧妙に利用している。）

前述の超準解析的な枠組ではこの数をどう考えたらよいか？

例えば、計算可能函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $f(c)$ は意味をもつのか？

— 前述の計算可能函数の定義では個々の引数が何なのかを問題にしていないから、問い自体が無意味。

— しかし敢えて計算の過程を問題にするならば c を Turing 機械のテープ上にコード化しなければならない。

— $\mathbb{N}$ 上の計算論ではこれは問題にならない。

$$n \longrightarrow |\#|\underbrace{1|\cdots|1}_{n}|\#|\cdots$$

しかし $\mathbb{R}$ では？

$$x \longrightarrow ??????$$

— 引数 x が Grzegorczyk の意味の計算可能実数（小数点以下各桁が $\mathbb{N}$ 上の計算可能函数 g の値として表現できる）ならば、その計算可能函数 g を引数のかわりに渡せばよい。

$$x \leadsto g \leadsto \#\ g\text{のコード}\ \#$$

— しかし前述の数 c ではこのような g が存在しない。

↓

計算可能函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を適用する
対象を「計算可能実数」に限定すれば
こんな面倒なことに悩まずに済む？

しかしながら，超準解析的に見れば
この数 c はむしろ 計算可能実数である
ようにも思える：—

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-a(n)}$$

部分和 $S_N = \sum_{n=0}^{N} 10^{-a(n)}$ $(N \in \mathbb{N})$

↳ 実数値であることを別にすれば
これは誰が見ても「計算可能」

*$\mathbb{N}$ に transfer すれば，

$$c \simeq S_\eta \qquad (\eta = 1/\varepsilon \ : 無限大)$$

↳ これを「計算可能」と言ってはいけないのか？？

残念ながら，前述の計算可能函数の定義を
0変数函数（＝定数）に拡げても，c は
その中には入って来ない．

どないしたら ええんや？

講演のあとで指摘されたことなど

- 実数をテープ上にコード化するには

  1 を $N(x)$ 個（超有限）並べればよい.

  つまり p.7 下段の図は次のようになる：—

$$n \longrightarrow \;|\#|\underbrace{1\;1\cdots\cdots\;1}_{n}|\#|$$

$$x \longrightarrow \;|\#|\underbrace{1\;1\cdots\cdots\quad}_{N(x)}|\#|$$

もちろん $N(x)$ は無限大だが，Turing 機械を非標準的に使うということはこういう超有限数の導入を意味する.

- それでも，実数そのもののかわりにそれを生成する計算可能関数（プログラム）のコードを引数として渡す，という考え方は興味がある.