行列の因子分解と Kostant-Toda 階層の簡約

高崎金久 近畿大学理工学部

応用解析研究会 2016 年 5 月 20 日

Gekhtman, Shapiro, Veinstein は S_n のコクセター元 u, v で定まる 2 重ブリュア胞体 $G^{u,v} \subset G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の上に戸田型可積分系を構成した．これは Berenstein, Fomin, Zelevinsky による行列の因子分解の応用であり，Feybusovich と Gekhtman の "elementary Toda orbits" の一般化を与える．この話題の基礎的な部分を紹介する．

コスタント-戸田階層（下ヘッセンベルグ型）

ラックス行列

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \cdot & \ddots & 1 \\ x_{n1} & \cdots & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = J + \text{下三角行列}$$

ラックス方程式系

$$\frac{\partial X}{\partial t_k} = [(X^k)_{\geq 0}, X], \quad k \geq 1$$

$(X^k)_{\geq 0}$ は対角部分を含めた上三角 ($\mathfrak{b}_+$) 部分，$(X^k)_{<0}$ は対角部分を含めない下三角 ($\mathfrak{n}_-$) 部分を表す．

ガウス分解による解法

ガウス分解

$$\exp\left(\sum_{k\geq 1} t_k X_0^k\right) = n(\boldsymbol{t})b(\boldsymbol{t}),$$

$$n(\boldsymbol{t}) \in N_- \ (\text{対角成分が 1 の下三角行列}),$$

$$b(\boldsymbol{t}) \in B_+ \ (\text{対角成分が非零の上三角行列})$$

によって初期値 $X(\mathbf{0}) = X_0$ に対するコスタント-戸田階層の解が

$$X(\boldsymbol{t}) = n(\boldsymbol{t})^{-1}X_0 n(\boldsymbol{t}) = b(\boldsymbol{t})X_0 b(\boldsymbol{t})^{-1}$$

という形で得られる (下ヘッセンベルグ性は保たれる).

さまざまな簡約系

1. 戸田格子（戸田分子）

$$X = (I + C)(J + D),$$

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n), \quad C = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1,i}$$

2. 相対論的戸田格子（Ruijsenaars-Toda system）

$$X = (I - C)^{-1}(J + D) = (I + C + C^2 + \cdots + C^{n-1})(J + D)$$

3. これらの中間の簡約系 "elementary Toda orbits" (Faybusovich and Gekhtman, JMP41 (2000), 2905-2921)

Elementary Toda orbit

整数列 $i_0 = 1 < i_1 < \cdots < i_k = n$ で決まるラックス行列の形

$$X = (I - C_1)^{-1}(I - C_2)^{-1} \cdots (I - C_k)^{-1}(J + D),$$

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n),$$

$$C_m = \sum_{i=i_{m-1}}^{i_m - 1} c_i e_{i+1,i},$$

$$(I - C_m)^{-1} = I + C_m + C_m^2 + \cdots + C_m^{i_m - i_{m-1} - 1}$$

は時間発展で保たれる．これから $2n-1$ 個の従属変数 $d_1, \cdots, d_n$, $c_1, \cdots, c_{n-1}$ をもつ簡約系が得られる．

Elementary Toda orbit（続き）

例：$n=5$, $k=2$, $i_0=1$, $i_1=3$, $i_2=5$ の場合

$$X=(I-C_1)^{-1}(I-C_2)^{-1}(J+D),$$

$$C_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementary Toda orbit（続き）

戸田格子の場合：$k=n-1,\ i_0=1,\ i_1=2,\ \cdots,\ i_{n-1}=n$

$$(I-C_1)^{-1}\cdots(I-C_{n-1})^{-1}=I+\sum_{i=1}^{n-1}c_ie_{i+1,i}$$

相対論的戸田格子の場合：$k=1,\ i_0=1,\ i_1=n$

$$C_1=C=\sum_{i=1}^{n-1}c_ie_{i+1,i},$$

$$(I-C)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ c_2c_1 & c_2 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

2重ブリュア胞体 $G^{u,v}$ $(u, v \in S_n)$

$$G^{u,v} = B_+ u B_+ \cap B_- v B_- \subset G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

1. ブリュア分解 $G = \bigcup_{u \in S_n} B_+ u B_+ = \bigcup_{v \in S_n} B_- v B_-$ の共通細分を与える．$G^{u,v}$ 自体はじつは胞体ではない．

2. 全非負行列（$\Leftrightarrow$ すべての小行列式が非負）からなる部分集合 $G^{u,v}_{>0}$ は $\mathbb{R}^{l(u)+l(v)+n}_{>0}$ と同相である（双有理写像で結ばれる）．

3. $G^{u,v}$ はコスタント-戸田階層の時間発展

$$X(\mathbf{0}) \mapsto X(\boldsymbol{t}) = n(\boldsymbol{t})^{-1} X(\mathbf{0}) n(\boldsymbol{t}) = b(\boldsymbol{t}) X(\mathbf{0}) b(\boldsymbol{t})^{-1}$$

で保たれる．

全非負部分 $G^{u,v}_{>0} \subset G^{u,v}$

$$G^{u,v}_{>0} \simeq \mathbb{R}^{l(u)+l(v)+n}_{>0}$$

この全単射は $X \in G^{u,v}_{>0}$ の基本ヤコビ行列

$$x_i(t) = I + te_{i,i+1}, \quad y_i(t) = I + te_{i+1,i}$$

と対角行列への因子分解（ガウス分解の精密化）

$$X = \prod_{k=1}^{l(u)} y_{a_k}(p_k) \cdot \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n) \cdot \prod_{k=1}^{l(v)} x_{b_k}(q_k)$$

による．因子の並び方は u, v の最短表示

$$u = s_{a_1} \cdots s_{a_{l(u)}}, \quad v = s_{b_1} \cdots s_{b_{l(v)}}$$

に対応している．

因子分解についての注意

この因子分解

$$X = \prod_{k=1}^{l(u)} y_{a_k}(p_k) \cdot \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n) \cdot \prod_{k=1}^{l(v)} x_{b_k}(q_k)$$

は $G^{u,v}_{>0}$ に限らず，$G^{u,v}$ のあるザリスキ開集合（一連の小行列式が非零の値をもつ）において成立する．すなわち，ほとんどの $X \in G^{u,v}$ はこのように因子分解できる．さらに，双有理変換しか使わないので，複素行列の場合 $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ にも同じことが言える（もともとそちらの話が先にある）．

文献：Berenstein, Fomin and Zelevinsky, Adv. Math. 122 (1996), 49–149; Fomin and Zelevinsky, J. AMS 12 (1999), 335–380.

u, v がコクセター元である場合

コクセター元は $s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ を 1 回ずつ用いて表せる（自動的に最短表示になる）S_n の元である．

整数列 $i_0 = 1 < i_1 < \cdots < i_k = n,\ j_0 = 1 < j_1 < \cdots < j_l = n$
が定める 2 つのコクセター元

$$u = {s_{[1,i_1]}}^{-1} {s_{[i_1,i_2]}}^{-1} \cdots {s_{[i_{k-1},n]}}^{-1},$$

$$v = s_{[j_{l-1},n]} s_{[j_{l-2},j_{l-1}]} \cdots s_{[1,j_1]}$$

を考える．ここで $s_{[i,j]} = s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1} = (i\ i+1\ \cdots\ j)$.

文献：Gekhtman, Shapiro and Veinstein, Acta Math. 206 (2011), 245–310.

u, v がコクセター元である場合（続き）

具体的に書けば

$$u = (s_{i_1-1} \cdots s_1)(s_{i_2-1} \cdots s_{i_1}) \cdots (s_{n-1} \cdots s_{i_{k-1}}),$$
$$v = (s_{j_{l-1}} \cdots s_{n-1})(s_{j_{l-2}} \cdots s_{j_{l-1}-1}) \cdots (s_1 \cdots s_{j_1-1})$$

対応する $X \in G^{u,v}$ の因子分解は

$$\begin{aligned} X = & \, y_{i_1-1}(q_{i_1-1}) \cdots y_1(q_1) \cdots y_{n-1}(q_{n-1}) \cdots y_{i_k}(q_{i_k}) \\ & \times \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n) \\ & \times x_{j_{l-1}}(p_{j_l}) \cdots x_n(p_{n-1}) \cdots x_1(p_1) \cdots x_{j_1-1}(p_{j_1-1}) \end{aligned}$$

となる.

Elementary Toda orbit との対応

$$
\begin{aligned}
X = {} & y_{i_1-1}(q_{i_1-1}) \cdots y_1(q_1) \cdots y_{n-1}(q_{n-1}) \cdots y_{i_k}(q_{i_k}) \\
& \times \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n) \\
& \times x_{j_{l-1}}(p_{j_l}) \cdots x_n(p_{n-1}) \cdots x_1(p_1) \cdots x_{j_1-1}(p_{j_1-1})
\end{aligned}
$$

$y_i(q_i)$ の積の部分（$u = s_{[1,i_1]}{}^{-1} s_{[i_1,i_2]}{}^{-1} \cdots s_{[i_{k-1},n]}{}^{-1}$ に対応する）は elementary Toda orbit のラックス行列の主要部分に一致する．$s_{[i_{m-1},i_m]}{}^{-1}$ に対応する部分を書き下せば

$$
y_{i_m-1}(p_{i_m-1}) \cdots y_{i_{m-1}}(p_{i_{m-1}}) = I - C_m,
$$

$$
C_m = \sum_{i=i_{m-1}}^{i_m-1} p_i e_{i+1,i}
$$

Elementary Toda orbit との対応

$$
\begin{aligned}
X = {} & y_{i_1-1}(q_{i_1-1})\cdots y_1(q_1)\cdots y_{n-1}(q_{n-1})\cdots y_{i_k}(q_{i_k}) \\
& \times \operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_n) \\
& \times x_{j_{l-1}}(p_{j_l})\cdots x_n(p_{n-1})\cdots x_1(p_1)\cdots x_{j_1-1}(p_{j_1-1})
\end{aligned}
$$

v を $v = s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_1$ に特殊化すれば，$x_i(p_i)$ の積の部分は

$$
x_{n-1}(p_{n-1})\cdots x_1(p_1) = I + \sum_{i=1}^{n-1} p_i e_{i,i+1}
$$

になる．これと $\operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ の積は X を対角行列によってゲージ変換することによって $J+D$ に帰着する．

Elementary Toda orbit との対応（続き）

結論

Elementary Toda orbit のラックス行列は

$$u = {s_{[1,i_1]}}^{-1}{s_{[i_1,i_2]}}^{-1}\cdots{s_{[i_{k-1},n]}}^{-1},$$
$$v = s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_1$$

というコクセター元の組に対する $G^{u,v}$ の因子分解可能な元を対角行列によってゲージ変換したものである．

特別な場合

1. 戸田格子 $\leftrightarrow u = v^{-1} = s_1s_2\cdots s_{n-1}$
2. 相対論的戸田格子 $\leftrightarrow u = v = s_{n-1}s_{n-1}\cdots s_1$

Gekhtman et al. (2011) は何をやっているか？

1. u, v がともに一般のコクセター元の場合に，因子分解可能な $X \in G^{u,v}$ をワイル函数

$$m(\lambda, X) = ((\lambda I - X)^{-1})_{11} = \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)}$$

($p(\lambda)$ は n 次，$q(\lambda)$ は $n-1$ 次多項式）の $\lambda = \infty$ での展開の係数から復元すること（逆問題の解法).

2. 同じワイル函数をもつ $X \in G^{u,v}$, $X' \in G^{u',v'}$ の間の関係（一般化されたベックルンド-ダルブー変換）をクラスター代数の言葉で説明すること.

3. 1 では円盤上の平面的ネットワーク，2 ではアニュラス上の平面的ネットワークが関与する.

数学セミナー
『線形代数とネットワーク』
好評連載中！