Tyurin パラメータと可換微分作用素環

高崎金久

概 要

Krichever と Novikov の 1970 年代の研究によって Tyurin パラメータと可換微分作用素環との関わりが明らかになった．以下では，ソリトン方程式の高種数的類似を考える材料として，この研究の概略を紹介する．可換微分作用素環にはスペクトル曲線と呼ばれる代数曲線とその上の正則ベクトルなどの幾何学的構造が付随している．Tyurin パラメータは代数幾何学で代数曲線上の安定正則ベクトル束のモジュライの定式化の一つとして提案されたものだが，可換微分作用素環ではそれが自然な形で登場する．可換微分作用素環と KP 階層による時間発展を組み合わせれば，KdV 方程式などの古典的ソリトン方程式の高種数的類似とみなすべき方程式が現れる．これらの方程式の定式化においても Tyurin パラメータが基本的役割を演じる．

1 はじめに

１変数 x の常微分作用素

$$
\begin{aligned}
Q &= \partial_x^m + u_2(x)\partial_x^{m-2} + \cdots + u_m(x),\\
P &= \partial_x^n + v_2(x)\partial_x^{n-2} + \cdots + v_n(x)
\end{aligned}
$$

の可換な（すなわち $[Q,P]=0$ を満たす）対を見出す問題は２０世紀初頭に Schur らによって採り上げられ，1920 年代の Burchnall と Chaundy の研究ではすでに代数曲線や Abel 函数論との関わりが指摘されていた．この問題はその後，1970 年代以降のソリトン方程式の研究において新たな位置づけを得て，今日に至っている．その間，Drinfeld，Mumford，Krichever，Novikov らによる先駆的研究，KP 階層・無限次元 Grassmann 多様体に基づく新たな視点からの研究，共形場理論など数理物理的視点からの研究，などさまざまな研究が行われている．

可換な微分作用素対（実際にはそれらの生成する可換微分作用素環の方が自然な対象である）にはスペクトル曲線と呼ばれる代数曲線（これが Burchnall と Chaundy の見出したものに他ならない）をはじめとする一連のデータが決まる．中でも「階数」と呼ばれる正整数は重要で，階数が 1 の場合と 1 よりも大きい場合では問題の性格が全く異なる．階数はスペクトル曲線上に決まるある正則ベクトル束の階数に他ならない．このため階数が 1 の場合には問題は曲線上の因子（直線束に対応する）に関する古典的な Jacobi の逆問題に帰着し，Abel-Jacobi 写像と Riemann テータ函数の組み合わせによって解ける [7]．これは 1970 年代半ばまでに知られていた有限帯ポテンシャルの概念や可積分系と代数幾何学との関わり [4] に対して統一的な説明を与えるものとなった．他方，階数が 1 より大きい場合には古典的な Abel 函数論の枠内には収まらず，何らかの形で正則ベクトル束のモジュライ空間を扱わねばならないことになる．

Krichever と Novikov は 1970 年代後半の研究 [8, 11, 12] において階数が一般の場合の可換微分作用素環を「代数的スペクトルデータ」によって分類することを提案した．その中でスペクトル曲線上のベクトル束を指定するものとして「Tyurin パラメータ」と呼ぶ量が登場する．これは「行列因子（matrix divisor)」とも呼ばれるもので，もともと代数幾何学で安定正則ベクトル束のモジュライ空間の一つの記述の仕方として考えられていたが [26]，Krichever と Novikov による可換微分作用素環の記述ではそれが自然な形で登場する．

さらに彼らは可換微分作用素環の KP 方程式による時間発展を考えて，そこからある種の拡張された意味でのソリトン方程式が得られることを指摘した．これらの方程式はスペクトル曲線上の有理型函数の行列で零曲率表示される．その形を具体的に求めることは容易ではないが，Krichever と Novikov はここでも Tyurin パラメータの概念に基づいてその一般的特徴を明らかにした．また，最も簡単な $m=4, n=6$ で階数 2 の場合には（スペクトル曲線は楕円曲線になる）零曲率方程式の具体的な形を決定した[1]．そこから得られるのが今日 Krichever-Novikov 方程式として知られる $1+1$ 次元の偏微分方程式である．不思議なことに，Krichever-Novikov 方程式は可換微分作用素環以外の文脈でも興味深い意味をもつことが知られていて，さまざまな研究が行われている[2]．

Krichever と Novikov によるこれらの研究はソリトン方程式の高種数的拡張を追求するという問題に対する一つの重要な手掛かりを提供する．Krichever は最近，一般種数の代数曲線上で行列型の Lax 方程式や零曲率方程式を構成する方法を示しているが [9]，それはやはり Tyurin パラメータの概念を駆使するものである（内容的には一応独立しているが，技術的には 1970 年代の研究と重なる部分が多い）．以下では，その後 1980 年代に進展した KP 階層の理論との関連も意識しつつ，Krichever と Novikov の 1970 年代の研究の基礎的な部分を紹介する．

なお，伊達の解説記事 [3] はベクトル束の構成や行列因子の概念について説明を補いつつ Krichever の論文 [8] の内容を簡潔に紹介している．可換微分作用素環全般（特に Krichever と Novikov の研究以後の進展）に関する解説資料としては Previato, Wilson [20], Mulase [18], Previato [19] などがある．古典的な階数 1 の場合の取り扱いや KdV 方程式などとの関係については田中・伊達の本 [25] が詳しく紹介している．

2　形式的 Baker-Akhiezer 函数

以下では Q, P の係数は C^1 級とする．必要に応じてさらに高いなめらかさあるいは解析性を仮定する．

Krichever と Novikov にしたがって x 空間の 1 点 x_0 を参照点として選んでおく．このとき線形微分方程式

$$Q\psi = z\psi$$

[1]ただし，その場合の可換微分作用素対に関して彼らの論文 [12] が具体的に記しているのは Q のみである．しかもその式は間違っていた！その後まもなく出た Grinevich の論文 [6] には Q, P 両方の正しい形が書いてある（それが Grinevich の論文の主結果というわけではない）．

[2]本稿では Krichever-Novikov 方程式について詳しく説明する余裕がないが，それを扱っている文献のデータを付録にまとめておいた．

の形式的 Laurent 級数解として

$$\psi(x,x_0,\lambda)=\Bigl(1+\sum_{\ell=1}^{\infty}S_\ell\lambda^{-\ell}\Bigr)e^{(x-x_0)\lambda},\quad \psi(x_0,x_0,\lambda)=1, \tag{2.1}$$

というものが構成できる（S_n に関する一連の連立微分方程式に書き換えて解をつくる）．ただし λ は z と

$$z=\lambda^m \tag{2.2}$$

という関係で結ばれるパラメータである．初期条件のおかげでこの解は一意的に決まる．

定義　$\psi(x,x_0,\lambda)$ を形式的 Baker-Akhiezer 函数という．

ここで KP 階層の考え方にならって（形式的）擬微分作用素

$$S=1+\sum_{\ell=1}^{\infty}S_\ell\partial_x^{-k}$$

を導入して状況を解釈してみよう．$\psi(x,x_0,\lambda)$ は

$$\psi(x,x_0,\lambda)=Se^{(x-x_0)\lambda} \tag{2.3}$$

とあらわせる．また，Q は

$$Q=S\partial_x^m S^{-1} \tag{2.4}$$

とあらわせる（右辺は擬微分作用素の合成である）．可換性の条件 $[Q,P]=0$ は

$$[\partial_x^m,\ S^{-1}PS]=0$$

と書き直せるが，これは $[\partial_x,\ S^{-1}PS]=0$ と同値であることがすぐにわかるので，$S^{-1}PS$ は定数係数の擬微分作用素となる：

$$S^{-1}PS=p(\partial_x)=\partial_x^n+\sum_{\ell=1}^{\infty}p_\ell\partial_x^{n-\ell}.$$

$p(\lambda)$ は $p(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots$ という定数係数の Laurent 級数である．左右から S と S^{-1} を掛けて P に戻してやれば，P の表示

$$P=p(Q^{1/m}) \tag{2.5}$$

が得られる．また

$$P\psi(x,x_0,\lambda)=p(\lambda)\psi(x,x_0,\lambda) \tag{2.6}$$

もこれからすぐにわかる．

ω を 1 の m 乗根 $\omega = e^{2\pi i/m}$ として，$\lambda \mapsto \omega^k\lambda$, $k = 1, 2, \ldots$, という変換を考える．$p(\omega^k\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots$, のうち最初に $p(\lambda)$ に戻るのが $k = \tilde{m}$ のときであるとする．すなわち

$$p(\omega^k\lambda) \neq p(\lambda)\ (k = 1, \ldots, \tilde{m}), \quad p(\omega^{\tilde{m}}\lambda) = p(\lambda). \tag{2.7}$$

$k = m$ のときにはとにかくもとに戻るので，基本周期 $\tilde{m}$ は m の約数でなければならない．そこでその商（正整数となる）を

$$r = m/\tilde{m} \tag{2.8}$$

とおく．

定義　r を可換な微分作用素対 Q, P の階数という．Q, P の生成する可換環を用いて生成系 Q, P によらない言葉でこれを定式化することもできるが，ここではそのことには立ち入らない（詳細は参考文献 [20, 18, 19] などに譲る）．

定義から

$$p(\lambda) = p(\omega^{\tilde{m}}\lambda) = p(e^{2\pi i/r}\lambda)$$

であるが，Laurent 級数として左辺は $\lambda^n + \cdots$，右辺は $(e^{2\pi i/r}\lambda)^n + \cdots$ という形をしているから，最初の項を見比べれば $e^{2\pi i n/r} = 1$ すなわち n/r が整数であることがわかる．そこで

$$\tilde{n} = n/r \tag{2.9}$$

とおく．結局 r は m, n の公約数である．さらに上に見た不変性から $p(\lambda)$ は別の Laurent 級数 $\tilde{p}(\kappa) = \kappa^{\tilde{n}} + \tilde{p}_1\kappa^{\tilde{n}-1} + \cdots$ によって

$$p(\lambda) = \tilde{p}(\lambda^r) \tag{2.10}$$

とあらわせることになる．以下，κ を λ と

$$\kappa = \lambda^r \tag{2.11}$$

という関係で結ばれる変数（パラメータ）と考える．κ^{-1} はこのあと導入するスペクトル曲線の無限遠点での局所座標を与える．

3　同時固有値問題

ここでは

$$Q\psi = z\psi, \quad P\psi = w\psi \tag{3.1}$$

という同時固有値問題の解を構成することを考える．同時固有函数が存在するためには固有値対 (z, w) はある代数的関係式を満たさなければならないことがわかる．それがスペクトル曲線の方程式である．なお，形式的 Baker-Akhiezer 函数は Q, P の同時固有函数の類似物ではあるが，$z = \infty$ の近傍の情報しか含んでおらず，本当の意味での同時固有函数ではない．しかし，$z = w = \infty$ の近傍で同時固有函数の様子を調べる際には形式的 Baker-Akhiezer 函数との比較が役にたつ．

3.1　微分作用素の作用から決まる行列

同時固有函数を構成するための土台として線形微分方程式 $Q\psi = z\psi$ の解の基本系 $\phi_0, \dots, \phi_{m-1}$ を

$$\partial_x^k \phi_j|_{x=x_0} = \delta_{jk} \tag{3.2}$$

という初期条件で定める．線形微分方程式の初期値問題の解についての一般論から，これらが z について整函数であることがわかる．必要に応じて z および x_0 についての依存性を明示して $\phi_j(x, x_0, z)$ ともあらわすことにする（というよりもむしろ，このように変数を全部書くと見づらくなるときには変数を書くのを省略する，と言うべきだろう）．

P は Q と可換なので $Q\psi = z\psi$ の解空間（m 次元で，$\phi_0, \dots, \phi_{m-1}$ を基底とする）に線形写像として作用する．言い換えれば

$$P\boldsymbol{\phi}(x, x_0, z) = \boldsymbol{\phi}(x, x_0, z) M(x_0, z) \tag{3.3}$$

という行列 $M(x_0, z)$ が決まる．ここで $\boldsymbol{\phi}(x, x_0, z)$ は $\phi_0, \dots, \phi_{m-1}$ を並べたベクトル

$$\boldsymbol{\phi}(x, x_0, z) = (\phi_0, \dots, \phi_{m-1})$$

である．

3.2　微分作用素の割り算から決まる行列

このままでは $M(x_0, z)$ がどのような行列であるかよくわからない．この行列をもう少し構成的な形で理解するために以下のようなことを考える．

上の式の x に関する $m-1$ 階までの導函数を縦に積めば

$$\begin{pmatrix} P\boldsymbol{\phi}(x_0, z) \\ \partial_x P\boldsymbol{\phi}(x, x_0, z) \\ \vdots \\ \partial_x^{m-1} P\boldsymbol{\phi}(x, x_0, z) \end{pmatrix} = \Phi(x, x_0, z) M(x_0, z) \tag{3.4}$$

という等式が得られる．ここで $\Phi(x, x_0, z)$ は ϕ_j 達の Wronski 行列

$$\Phi(x, x_0, z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}(x, x_0, z) \\ \partial_x \boldsymbol{\phi}(x, x_0, z) \\ \vdots \\ \partial_x^{m-1} \boldsymbol{\phi}(x, x_0, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 & \cdots & \phi_{m-1} \\ \partial_x \phi_0 & \cdots & \partial_x \phi_{m-1} \\ & \cdots & \\ \partial_x^{m-1} \phi_0 & \cdots & \partial_x^{m-1} \phi_{m-1} \end{pmatrix}$$

である．ところで，１変数の微分作用素にも多項式と同様に割り算が可能である，ということに注目しよう．すなわち，任意の微分作用素 A に対して

$$A = BQ + C, \quad C = c_0 + c_1 \partial_x + c_{m-1} \partial_x^{m-1},$$

という微分作用素 B, C が一意的に存在する（B が商，C が剰余に相当する）．さらに，B を同様に Q で割り算し，その商を Q で割り算し，$\cdots$，ということを繰り返すと，い

つかは商がゼロになるところに至るが，その結果をまとめると，A に対して「Q 進表示」と言うべき表示

$$A=\sum_{\ell\geq 0}(c_{0,\ell}+c_{1,\ell}\partial_x+\cdots+c_{m-1,\ell}\partial_x^{m-1})Q^\ell$$

が得られる．$c_{j,\ell}$ は R から一意的に決まる函数で，右辺の和はもちろん有限和である．この表示の面白いところは微分方程式 $Q\psi=z\psi$ の任意の解に対してその作用が

$$\begin{aligned} A\psi &= \sum_{\ell\geq 0}(c_{0,\ell}+c_{1,\ell}\partial_x+\cdots+c_{m-1,\ell}\partial_x^{m-1})z^\ell\psi \\ &= c_0(z)\psi+c_1(z)\partial_x\psi+\cdots+c_{m-1}(z)\partial_x^{m-1}\psi \end{aligned}$$

というような形にまとめられることにある．ここで $c_j(z)$ は

$$c_j(z)=\sum_{\ell\geq 0}c_{j,\ell}z^\ell$$

という多項式である．∂_x のべき乗と P との積 $P,\partial_xP,\ldots,\partial_x^{m-1}P$ に対してこの割り算を実行すると，一連の多項式 $v_{jk}(z)$, $j,k=0,\ldots,m-1$ が決まって，$Q\psi=z\psi$ の任意の解 ψ に対して

$$\begin{aligned} P\psi &= v_{00}(z)\psi+v_{01}(z)\partial_x\psi+\cdots+v_{0,m-1}(z)\partial_x^{m-1}\psi, \\ \partial_xP\psi &= v_{10}(z)\psi+v_{11}(z)\partial_x\psi+\cdots+v_{1,m-1}(z)\partial_x^{m-1}\psi, \\ &\vdots \\ \partial_x^{m-1}\psi &= v_{m-1,0}\psi+v_{m-1,2}\partial_x\psi+\cdots+v_{m-1,m-1}\partial_x^{m-1}\psi \end{aligned}$$

という等式が成立する．これは

$$\begin{pmatrix} P\psi \\ \partial_xP\psi \\ \vdots \\ \partial_x^{m-1}P\psi \end{pmatrix}=V(x,z)\begin{pmatrix} \psi \\ \partial_x\psi \\ \vdots \\ \partial_x^{m-1}\psi \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

という形にまとめることができる．ここで $V(x,z)$ は

$$V(x,z)=(v_{jk}(x,z))_{j,k=0,\ldots,m-1}$$

という行列である．特にこれを $\psi=\phi_k$, $k=0,\ldots,m-1$, に対して適用して行列に組み直せば

$$\begin{pmatrix} P\boldsymbol{\phi}(x,x_0,z) \\ \partial_xP\boldsymbol{\phi}(x,x_0,z) \\ \vdots \\ \partial_x^{m-1}P\boldsymbol{\phi}(x,x_0,z) \end{pmatrix}=V(x,z)\Phi(x,x_0,z) \tag{3.6}$$

という関係式が得られる．これを $M(x,x_0,z)$ の定義式から得られる関係式

$$\begin{pmatrix} P\boldsymbol{\phi}(x,x_0,z) \\ \partial_x P\boldsymbol{\phi}(x,x_0,z) \\ \vdots \\ \partial_x^{m-1} P\boldsymbol{\phi}(x,x_0,z) \end{pmatrix} = \Phi(x,x_0,z)M(x_0,z)$$

と見比べると

$$M(x_0,z) = \Phi(x,x_0,z)^{-1}V(x,z)\Phi(x,x_0,z) \tag{3.7}$$

という等式が成立することがわかる．初期条件 $\Phi(x_0,x_0,z) = I$ を思い出せば，この式を $x = x_0$ に制限することによって $M(x_0,z)$ の表示式

$$M(x_0,z) = V(x_0,z) \tag{3.8}$$

が得られる．特に次のことが確かめられた：

補題 1 $M(x_0,z)$ の行列要素は z の多項式である．

注意

1. $V(x,z)$ の行列要素を直接に割り算で求めることは計算法としては効率的でない（m,n が大きくなると実行不可能）．実際の計算には漸化式や母函数を利用する．特に，$m=2$ の場合はソリトン理論でよく知られている（田中・伊達の本 [25] 参照）．

2. $M(x_0,z)$ と $V(x,z)$ の関係式を

$$V(x,z) = \Phi(x,x_0,z)M(x_0,z)\Phi(x,x_0,z)^{-1}$$

と書き直して x で微分すると

$$\partial_x V(x,z) = [U(x,z), V(x,z)] \tag{3.9}$$

という一種の Lax 方程式が得られる．ここで

$$U(x,z) = \partial_x\Phi(x,x_0,z)\cdot\Phi(x,x_0,z)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ z-u_m & -u_{m-1} & \cdots & -u_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 同時固有函数の構成

$M(x_0,z)$ と同時固有値問題の間には次の基本的関係がある．

補題 2 $\mathbf{c}$ が $M(x_0,z)$ の固有ベクトル，すなわち

$$M(x_0,z)\mathbf{c} = w\mathbf{c} \tag{3.10}$$

が成立すれば，$\psi = \boldsymbol{\phi}(x,x_0,z)\mathbf{c}$ は Q,P に対する固有値対 (z,w) の同時固有函数となる．逆に，任意の同時固有函数はこの形で得られる．

証明 $\mathbf{c}$ を $M(x_0,z)$ の固有ベクトルとする．ψ は ϕ_j の１次結合だから明らかに同じ方程式 $Q\psi = z\psi$ を満たす．もう一つの方程式を満たしていることも

$$\begin{aligned} P\psi &= (P\phi_0,\ldots,P\phi_{m-1})\mathbf{c} \\ &= (\phi_0,\ldots,\phi_{m-1})M(x_0,z)\mathbf{c} \\ &= w(\phi_0,\ldots,\phi_{m-1})\mathbf{c} \\ &= w\psi \end{aligned}$$

というようにして確かめられる．逆に ψ を任意の同時固有函数とする．$\phi_0,\ldots,\phi_{m-1}$ は $Q\psi = z\psi$ の解の基本系だから ψ はそれらの定数係数１次結合で書ける．言い換えれば，$\psi = \boldsymbol{\phi}(x,x_0,z)\mathbf{c}$ という定数ベクトル c が存在する．これを用いて $P\psi = w\psi$ という方程式を書き直せば

$$\boldsymbol{\phi}(x,x_0,z)M(x_0,z)\mathrm{c} = \boldsymbol{\phi}(x,x_0,z)w\mathbf{c}$$

となるが，$\phi_0,\ldots,\phi_{m-1}$ は函数系として１次独立だから $\boldsymbol{\phi}(x,x_0,z)$ を取り除いた等式 $M(x_0,z)\mathrm{c} = w\mathrm{c}$ が成立しなければならない．これは c が $M(x_0,z)$ の固有ベクトルであることを意味する．（証明終わり）

系 1 (Q,P) の同時固有函数の固有値対 (z,w) は固有方程式

$$\det(wI - M(x_0,z)) = 0 \tag{3.11}$$

を満たす．逆に固有値対はこの方程式を満たすものとして特徴づけられる．

注意

1. x_0 を変えれば解の基本系 $\phi_0,\ldots,\phi_{m-1}$ はその函数として変化するが，これは方程式 $Q\psi = z\psi$ の解空間の基底変換なので，x_0 が変わっても P の作用の表現行列 $M(x_0,z)$ は相似な行列に変わるだけで，固有多項式 $\det(wI - M(x_0,z))$ は変わらない．すなわち，$\det(wI - M(x_0,z))$ は (x,z) の定数係数多項式である：

$$\det(wI - M(x_0,z)) \in \mathbf{C}[z,w]. \tag{3.12}$$

   このことは $M(x_0,z) = V(x_0,z)$ が x_0 について Lax 方程式を満たすことからも結論できる．

2. 大ざっぱに言えば，固有方程式 $\det(wI - M(x_0,z)) = 0$ によって定義されるのが可換微分作用素対のスペクトル曲線である．ただし，次節で示すように，じつはこの方程式は既約ではなく，r 重に重複している．

4　スペクトル曲線

固有多項式 $\det(wI - M(x_0, z))$ の構造を $z = \infty$ の近傍で考える．この際に形式的 Baker-Akhiezer 函数 $\psi(x, x_0, z)$ が利用できる（代数幾何学的には $z = \infty$ の形式的近傍を調べることになる）．

$z = \lambda^m$ という関係を思い出せば，$\psi(\omega^k \lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, はいずれも方程式 $Q\psi = z\psi$ の（形式的 Laurent 級数）解である．これらを解の基本系とみなして（つまり解空間の基底変換）P の作用を行列表示すれば，表現行列は $M(x_0, z)$ と相似な行列になる．変換行列は z の形式的 Laurent 級数からなるが，固有多項式自体には現れない．この新しい基本系では P の作用は

$$P\psi(x, x_0, \omega^k \lambda) = p(\omega^k \lambda)\psi(x, x_0, \omega^k \lambda)$$

というように対角化されている．したがって

$$\det(wI - M(x_0, z)) = \prod_{k=0}^{m-1} (w - p(\omega^k \lambda))$$

という等式が成立する．ところで，$p(\lambda)$ と $\tilde{p}(\kappa)$ の関係から

$$p(\omega^k \lambda) = \tilde{p}(\omega^{kr} \lambda^r) = \tilde{p}(e^{2\pi ikr/\tilde{m}} \lambda^r)$$

となることがわかる．したがって $w - p(\omega^k \lambda)$ は k について周期的で，周期 $\tilde{m}$ ごとに元に戻る．こうして前述の式は

$$\det(wI - M(x_0, z)) = \prod_{j=0}^{\tilde{m}-1} (w - \tilde{p}(e^{2\pi ij/\tilde{m}} \lambda^r))^r \tag{4.1}$$

と書き直せることがわかる．これは $M(x_0, z)$ の各固有値が $z = 0$ の形式的近傍で r 重に縮退していることを示している．このことから次が従う．

定理 1 $f(z, w)$ を上の式の r 乗根，すなわち

$$f(z, w) = \prod_{j=0}^{\tilde{m}-1} (w - \tilde{p}(e^{2\pi ij/\tilde{m}} \lambda^r)) \tag{4.2}$$

と定義すると，$f(z, w)$ は z, w の多項式になる．

証明　w については明らかに多項式だから，z について多項式であることを示せばよい．$\det(wI - M(x_0, z))$ は (z, w) の多項式で，$f(z, w)$ はその r 乗根であるから，$f(z, w)$ は z について代数函数である．$f(z, w)$ の定義式の 1 次因子は $z = \infty$ の周りで多価だが，多価性は 1 次因子の入れ替えを引き起こすだけなので，それらを掛けたものは 1 価になる．つまり $f(z, w)$ は z について $z = \infty$ の近傍で 1 価である．これは $f(z, w)$ 自体が多項式であることを意味する．(証明終わり)

定義　方程式 $f(z,w)=0$ の定める曲線（アフィン代数曲線）をスペクトル曲線という．正確にはさらに無限遠点を追加してコンパクト化する必要がある．それと区別するときにはアフィンスペクトル曲線と呼ぶ．

5　正則ベクトル束

以下の議論は技術的にかなり複雑なので細部を省いて概要のみ説明する．細部については参考文献を参照されたい．

上に見たことによって，$M(x_0,z)$ の固有値は正確に r 重に重複した組に分かれていることがわかった．すなわち，スペクトル曲線の各点 (z,w) には r 重の固有値の組 $w,\ldots,w$ が付随している．それに対応する固有空間は r 次元であり，その基底 $\mathbf{c}_0,\ldots,\mathbf{c}_{r-1}$ を選べば，それらが定める同時固有函数系

$$\psi_k=\boldsymbol{\phi}(x,x_0,z)\mathbf{c}_k,\quad k=0,\ldots,r-1, \tag{5.1}$$

は同時固有函数の空間

$$E_{(z,w)}=\{\psi\mid Q\psi=z\psi,\ P\psi=w\psi\} \tag{5.2}$$

の基底となる．言い換えれば，階数とは固有値対 (z,w) に対する同時固有函数の空間の次元に他ならない．

(z,w) 平面上のスペクトル曲線を Γ_0 とあらわそう．その各点に r 次元のベクトル空間 $E_{(z,w)}$ が付随しているという構造は階数 r のベクトル束に他ならない．このベクトル束を E とあらわそう．$M(x_0,z)$ の固有ベクトルは Cramer の公式などを用いて (z,w) の有理式からなるように選べる．対応する同時固有函数系は Γ_0 上の有理型函数となり，$M(x_0,z)$ の固有ベクトルの成分のもつ極に由来する極をもつ．したがって E は正則ベクトル束であり，同時固有函数はその局所正則断面である．ただし，正確にいえば，r 重に縮退した固有値同士がさらにぶつかるところ，すなわちスペクトル曲線の z 軸への射影の分岐点では状況は微妙であるが，実際にはこれらの分岐点も含めて Γ_0 上の正則ベクトル束ができている．(要は，分岐点においてスペクトル曲線の局所座標を選び，それについて正則に依存する r 個の１次独立な固有ベクトルの組があることを示せばよい．$r=1$ の場合にはこの種の議論はよく知られているので [2, 付録 3]，それにならって考えればよい）．

アフィンスペクトル曲線 Γ_0 の方程式は

$$f(z,w)=w^{\tilde{m}}+a_1(z)w^{\tilde{m}-1}+\cdots+a_{\tilde{m}}(z)=0$$

という形をしている．$a_1(z),\ldots,a_{\tilde{m}}(z)$ は z の多項式である．これを $\gamma_\infty : z=w=\infty$ で１点コンパクト化したものを Γ とあらわす：

$$\Gamma=\Gamma_0\cup\{\gamma_\infty\},\quad \gamma_\infty=(\infty,\infty).$$

γ_∞ の近傍ではこの曲線は $z=\infty$ の上方で $\tilde{m}$ 重に分岐している．各分枝は

$$w=\tilde{p}(e^{2\pi ik/\tilde{m}}\lambda^r)=\tilde{p}(e^{2\pi ik/\tilde{m}}\kappa),\quad k=0,1,\ldots,\tilde{m}-1 \tag{5.3}$$

で与えられる．特に，γ_∞ の近傍の局所座標として κ^{-1} を選べばよいことがわかる．前述のベクトル束 E は以下に説明するような手順で Γ 上のベクトル束（同じ記号 E であらわす）まで正則ベクトル束として延びる．$r > 1$ の場合にはそこから可換微分作用素対（あるいは可換微分作用素環）に付随する新たなデータが現れる．

$r > 1$ とする．E を γ_∞ の近傍まで延ばすためには同時固有函数系 $\psi_0, \ldots, \psi_{r-1}$ の $z \to \infty$ での振る舞いに注目する．$z \to \infty$ での振る舞いは形式的 Baker-Akhiezr 函数と比較することによって調べることができる [8, 11, 12]．それによれば，

$$\partial_x^k \psi_j|_{x=x_0} = \delta_{jk} \tag{5.4}$$

というように正規化した同時固有函数系（そのように選び直すことは常にできる）について

$$(\psi_0, \ldots, \psi_{r-1}) = (1 + \xi_0, \ldots, \xi_{r-1})\Psi_0 \tag{5.5}$$

となる．ここで $\xi_0, \ldots, \xi_{r-1}$ は κ の負べき級数

$$\xi_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} \xi_{k\ell}\kappa^{-\ell} \tag{5.6}$$

であり，$\Psi_0 = \Psi_0(x, x_0, \kappa)$ は

$$\partial_x \Psi_0 = A_0 \Psi_0 \tag{5.7}$$

という行列型微分方程式の初期条件 $\Psi_0|_{x=x_0} = I$ を満たす行列解である．ここで A_0 は $r-1$ 個の函数 $w_2(x), \ldots, w_r(x)$（これがスペクトル曲線やベクトル束などの幾何学的データに加えて登場する新たなデータである）を含む次のような行列である．

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \kappa - w_r(x) & -w_{r-1}(x) & \cdots & -w_2(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

$\Psi_0(x, x_0, \kappa)$ は κ 平面上の整函数の行列で，$\kappa = \infty$ において指数函数型の真性特異点をもつ．上の式をベクトル束の局所正則断面の基底（つまり局所枠）の間の変換関係とみなすことによって，コンパクト化されたスペクトル曲線 Γ 全体で定義されたベクトル束が決まる．すなわち，

1. $\delta_{k,0} + \xi_k$ 達は γ_∞ の近傍における正則断面の基底（つまり γ_∞ における局所自明化）
2. ψ_k 達はアフィン部分 Γ_0 からいくつかの点（Tyurin パラメータに関係する）を除いたところでの正則断面の基底
3. Ψ_0 はそれらの間の変換函数

と解釈する．

定理 2 以上のようにして Γ 上の正則ベクトル束 E が決まる．その局所正則断面は (Q, P) に対する同時固有函数である．

定義　可換微分作用素対（あるいはそれに付随する可換微分作用素環）から以上のようにして決まるスペクトル曲線 Γ，無限遠点 γ_∞，その近傍の局所座標の逆数 κ，正則ベクトル束 E，ならびに函数データ $w_2(x),\ldots,w_r(x)$ の組を代数的スペクトルデータという．

注意　直線束すなわち $r=1$ の場合には Q,P の同時固有函数の空間は1次元であり，1個の同時固有函数 ψ が決まる．この場合には $z=\lambda=\kappa$ であり，上の関係の代わりに

$$\psi=(1+\xi)e^{(x-x_0)\lambda},\quad \xi=\sum_{\ell=1}^{\infty}\xi_\ell\lambda^{-\ell}, \tag{5.9}$$

というものを考えることになる．要するに Γ 全体でいくつかの極と γ_∞ における真性特異点をのぞいて定義され，γ_∞ で指数函数的に振る舞う，という本来の（古典的な）Baker-Akhiezer 函数である．それは ψ は Abel-Jacobi 写像と Riemann テータ函数の組み合わせで直接に構成することができる [7]．ソリトン方程式の準周期解の構成や有限自由度可積分系の代数幾何学的解法 [4, 5] の背後にはこの事実がある．

6　Tyurin パラメータ

ここでも $\partial_x^j\psi_k|_{x=x_0}=\delta_{jk}$ というように正規化された同時固有函数系 $\psi_k,\ k=0,\ldots,r-1$ を引き続き考える（正規化の仕方はこれに限るものではないが，これが最も考えやすい）．これらは Γ 上の函数で，x,x_0 にも依存する．変数を明示するときには $\psi_k(x,x_0,z,w)$ あるいは $\psi_k(x,x_0,\gamma)$, $\gamma=(z,w)\in\Gamma$，というようにあらわすことにしよう．また，記法を簡潔にするためこれらの同時固有函数を並べたベクトル

$$\boldsymbol{\psi}(x,x_0,\gamma)=(\psi_0,\ldots,\psi_{r-1})$$

を導入しよう．

ψ_k は γ_∞ で真性特異点をもつ他に Γ のいくつかの点で極をもつ．これら極は対応する $M(x_0,z)$ の固有ベクトル $\mathbf{c}_k,\ k=0,\ldots,r-1$ の極だから，x に依らず一定の位置にある（ただし x_0 には依存する）．generic な状況ではこれらの極はいずれも単純極と考えられる．これらを $\gamma_1,\ldots,\gamma_N$ とあらわす．さらに γ_s における同時固有函数の留数 $\mathrm{Res}_{\gamma_s}\psi_k dz$, $k=0,\ldots,r-1$ （x の函数となる）を考えて，これら r 個の函数のうち1次独立な組の最大個数を m_s とあらわす（Krichever [8] はこれを κ_s と書いているが，前述の κ と紛らわしく，またあとで κ_s を別の用途に用いるので，ここでは m_s と書くことにしよう）．Krichever の詳しい議論によれば（ただしミスプリがある）次のことがわかる．

補題 3

$$\sum_{s=1}^{N}m_s=rg \tag{6.1}$$

という等式が成立する．ここで g は Γ の種数である．

証明の方針　この等式を導く際には，z に対する $M(x_0,z)$ の固有値の重複分を省いたもの $w=w_1,\dots,w_{\tilde m}$ （つまり Γ から $\mathbf{P}^1$ への射影 $(z,w)\mapsto z$ の逆像の w 座標）から m 個の函数 $\psi_k(x,x_0,z,w_j)$ $(k=0,\dots,r-1,\ j=1,\dots,\tilde m)$ をつくり，その Wronski 行列式の平方

$$F=\det\Bigl(\partial_x^\ell\psi_k(x,x_0,z,w_j)\mid \ell=0,\dots,m-1,\ j=1,\dots,\tilde m,\ k=0,\dots,r-1\Bigr)^2 \quad (6.2)$$

を考える．平方することで w_j 達の入れ替えに依らなくなるので，これは z の函数として well defined で，結果として有理函数となる．その極は $z=\infty$ と γ_s 達の射影の像 $z(\gamma_1),\dots,z(\gamma_N)$ に生じる．$z=z(\gamma_s)$ における極の位数は m_s に等しい．他の極や零点の様子を調べることによって m_s の総和に関する上の等式が得られる（詳しくは Krichever の論文 [8] を参照されたい）．

行列因子の理論（たとえば伊達の解説 [3] を参照されたい）によれば m_s が大きい（言い換えれば有理函数 F の極の位数が高い）ほど退化が進んだ特殊な状況であると考えられる．generic な状況（Krichever の用語では「一般の位置」）では m_s はいずれも 1 に等しい．以後，この状況

$$m_s=1 \quad (s=1,\dots,rg) \quad (6.3)$$

を仮定しよう．

このとき同時固有函数系は $N=rg$ 個の点 $\gamma_1,\dots,\gamma_{rg}$ において 1 位の極をもつ．さらに，そこでの留数 $\mathrm{Res}_{\gamma_s}\psi_k dz$ として得られる x の r 個の函数のどれか一つ，たとえば $k=r-1$ を選べば，他の $r-1$ 個はそれにある定数 $\alpha_{s,k}$ を掛けたものとして

$$\operatorname*{Res}_{\gamma_s}\psi_k dz=\alpha_{s,k}\operatorname*{Res}_{\gamma_s}\psi_{r-1}dz,\quad k=0,\dots,r-2, \quad (6.4)$$

とあらわせる．このことを

$$\boldsymbol{\alpha}_s=(\alpha_{s,0},\dots,\alpha_{s,r-2},1)$$

というベクトルを用いて

$$\boldsymbol{\psi}(x,x_0,\gamma)=\frac{\beta_s\boldsymbol{\alpha}_s}{z-z(\gamma_s)}+O(1)\quad(\gamma\to\gamma_s) \quad (6.5)$$

とあらわすこともできる．β_s はスカラーで，要するに $\psi_{r-1}dz$ の留数に等しい．後の議論ではこちらの表示を用いる方が便利である．ちなみに，ここでは同時固有函数系の最後の ψ_{r-1} を基準にしたが，その留数が消えるときには別のものを基準にする必要がある．いずれにせよ重要なのはベクトル $\boldsymbol{\alpha}_s$ の方向のみで，スカラー倍の違いは重要でない．その意味で $\boldsymbol{\alpha}_s$ は $\mathbf{P}^{r-1}$ の要素と見なしてよい．

定義　こうして得られるデータ $(\gamma_s,\boldsymbol{\alpha}_s)\in\Gamma\times\mathbf{P}^{r-1}$, $s=1,\dots,rg$, の組を Tyurin パラメータという．x_0 を変えればこれらは変わるので，そのことを強調するときには $(\gamma_s(x_0),\boldsymbol{\alpha}_s(x_0))$ と書く．

注意　これらのパラメータは正則ベクトル束 E を Tyurin[26] の意味で指定するものとみなせる．代数的スペクトルデータでは正則ベクトル束の代わりにこれらの Tryurin パラメータを指定することもできる．実際，Krichever[8] はむしろそのような形で代数的スペクトルデータを定式化し[3]，逆問題（すなわち Tyurin パラメータを含む一連のデータを与えて可換微分作用素環を復元すること）を立てている．Krichever はこの逆問題を Γ 上の一種の「Riemann-Hilbert 問題」として捉えて，積分方程式に翻訳することによって解いている．Previato と Wilson[20] は積分方程式の代わりに無限次元 Grassmann 多様体を用いて Riemann-Hilbert 問題を解いている．ちなみに，Li と Mulase[16, 14] はやはり無限次元 Grassmann 多様体を用いて可換部分作用素環を扱っているが，彼らの方法は Previato・Wilson と異なる考え方に基づく．特に，彼らは Krichever の $w_2, \ldots, w_r$ という函数データの代わりにベクトル束の無限遠点における局所自明化をデータとして用いる．またベクトル束についても純代数的（スキーム論的）に構成されるものを考える．

7　もう一組の Tyurin パラメータ

古典的なスカラー値の Baker-Akhiezer 函数では無限遠点に真性特異点，それ以外の g 個の点（あるいは重複も考慮すると次数 g の正因子）に極をもつが，極と対をなすものとして g 個の零点（あるいは零点からなる次数 g の正因子）がある．Krichever の定式化 [7] では g 個の極が固定され，零点が x に依存して動くようになっている．さらに，Abel-Jacobi 写像でこの零点因子を Γ の Jacobi 多様体に写せば，その像の運動は Jacobi 多様体上で直線運動する．すなわち Jacobi 多様体を複素トーラス $\mathbf{C}^g/L$ として実現すれば，$\mathbf{C}^g$ の座標で時間の 1 次函数として動く点となる．

$r > 1$ の場合にもこの零点因子に相当するものが考えられる．これらは前述の同時固有函数系 ψ_k の Wronski 行列

$$\Psi(x, x_0, \gamma) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}(x, x_0, \gamma) \\ \partial_x \boldsymbol{\psi}(x, x_0, \gamma) \\ \vdots \\ \partial_x^{r-1} \boldsymbol{\psi}(x, x_0, \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 & \cdots & \psi_{r-1} \\ \partial_x \psi_0 & \cdots & \partial_x \psi_{r-1} \\ & \cdots & \\ \partial_x^{r-1} \psi_0 & \cdots & \partial_x^{r-1} \psi_{r-1} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

の退化するところ，すなわち $\det \Psi(x, x_0, \gamma)$ の零点に関連して現れる．

補題 4 $\det \Psi(x, x_0, \gamma)$ は $P = (z, w)$ の函数として Γ 全体で定義された有理型函数であり，$\gamma_s(x_0)$, $s = 1, \ldots, rg$, に極をもつ以外は正則である．

証明　ψ_k 達の γ_∞ の近傍での振る舞いをあらわす式

$$(\psi_0, \ldots, \psi_{r-1}) = (1 + \xi_0, \ldots, \xi_{r-1}) \Psi_0$$

[3] じつは Krichever の論文ではそもそも正則ベクトル束として何を考えているかが曖昧である（しかも二種類の異なるベクトル束が登場する）．前節のベクトル束の構成の説明は伊達の解説 [3] から借りてきたものである．

を微分すれば，$\Psi(x,x_0,\gamma)$ に対する局所表示

$$\Psi(x,x_0,\gamma)=\Xi\Psi_0(x,x_0,\kappa),\quad \Xi=\sum_{\ell=0}^{\infty}\Xi_\ell\kappa^{-\ell} \tag{7.2}$$

が得られる．ここで Ξ_0 は対角要素が 1 の下三角行列になる．$\Psi_0(x,x_0,z)$ を定義する微分方程式は係数行列が trace-free だから $\det\Psi_0(x,x_0,\kappa)=1$ である．したがって $\det\Psi$ は γ_∞ で

$$\det\Psi=1+O(\kappa^{-1})$$

と振る舞う．これから求める結論が得られる．(証明終わり)

$\det\Psi$ は $\gamma_s(x_0)$, $s=1,\ldots,rg$ に極をもつので，対応して rg 個の零点 $\gamma_s(x)$, $s=1,\ldots,rg$ が存在することになる．

$$\det\Psi(x,x_0,\gamma)=0,\quad \gamma=\gamma_1(x),\ldots,\gamma_{rg}(x). \tag{7.3}$$

これらの極の位置は x に依って動く．さらに，ψ_k 達の正規化の仕方から $\Psi|_{x=x_0}=I$ なので，行列式も $x=x_0$ で 1 になる．これは rg 個の極と零点が $x=x_0$ では全体として合流して消滅することを意味している（これをもう少し明確に示すこともできるが，ここでは省略する）．したがって零点の番号を適当に付け替えて $x\to x_0$ で $\gamma_s(x)\to\gamma_s(x_0)$ となるようにしておけば記号的にもつじつまが合う．以下，$\gamma_1(x),\ldots,\gamma_{rg}(x)$ が互いに異なる（つまり $\det\Psi$ の単純零点である）という状況で考える．

以下，これらの点 $\gamma_s(x)\in\Gamma$ に加えて一連の方向ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ を定めようというわけであるが，それは

$$A(x,x_0,\gamma)=\partial_x\Psi(x,x_0,\gamma)\cdot\Psi(x,x_0,\gamma)^{-1} \tag{7.4}$$

という行列に関係がある．Ψ が Wronski 行列であることからこの行列は必然的に

$$A(x,x_0,\gamma)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ a_r & a_{r-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

という形になる．$a_1,\ldots,a_r$ は x,x_0 と $\gamma=(z,w)\in\Gamma$ の函数であり，$\psi_0,\ldots,\psi_{r-1}$ はこれらを係数とする線形常微分方程式

$$(\partial_x^r-a_1\partial_x^{r-1}-\cdots-a_r)\psi=0 \tag{7.6}$$

の解の基本系に他ならない（Wronskian 構成法）．これらの函数あるいは行列 $A(x,x_0,\gamma)$ 自体の $\gamma=(z,w)$ の函数としての性質については次のことがわかる．

定理 3 $a_1, \ldots, a_r$ は $\gamma = (z, w)$ に関して Γ 上の有理型函数であり，極は γ_∞ と $\gamma_s(x)$, $s = 1, \ldots, rg$ にある．さらに，$\gamma \to \gamma_\infty$ において

$$\begin{aligned} a_1 &= O(\kappa^{-1}), \\ a_j &= -w_j + O(\kappa^{-1}) \quad (j = 2, \ldots, r-1), \\ a_r &= \kappa - w_r + O(\kappa^{-1}), \end{aligned} \tag{7.7}$$

と振る舞う（$w_2, \ldots, w_r$ は Ψ_0 の定義微分方程式の係数に現れた函数）．また，$\gamma \to \gamma_s(x)$ において

$$A(x, x_0, \gamma) = \frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)}{z - z(\gamma_s(x))} + O(1) \tag{7.8}$$

となる．ここで $\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ と $\boldsymbol{\beta}_s(x)$ は x に依存する r 次元ベクトルである．$\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ を

$$\boldsymbol{\alpha}_s(x) = (\alpha_{s,0}(x), \ldots, \alpha_{s,r-2}(x), 1)$$

と正規化すればこれらのベクトルは一意的に決まる．さらに $x \to x_0$ とするとき

$$\boldsymbol{\alpha}_s(x) \to \boldsymbol{\alpha}_s(x_0) \tag{7.9}$$

となる．

証明

1. $\Psi(x, x_0, \gamma)$ に対する γ_∞ での前述の局所表示から，$a_1, \ldots, a_r$ は γ の函数として γ_∞ ではもはや真性特異点をもたず，高々極をもつだけであることがわかる．局所表示に基づいてきちんと計算すれば，γ_∞ での振る舞いは上に示したとなることがわかる．

2. $\gamma_s(x_0)$ での $A(x, x_0, \gamma)$ の様子を考える．ここでは $\partial_x \Psi(x, x_0, \gamma)$ は 1 位の極をもつが，Cramer の公式によって $\Psi(x, x_0, \gamma)^{-1}$ が 1 位の零点をもつことがわかるので，$A(x, x_0, \gamma)$ はこの点では正則である．

3. $\gamma_s(x)$ での $A(x, x_0, \gamma)$ の様子を調べる．ここでは $\partial_x \Psi(x, x_0, \gamma)$ は正則だが，$\Psi(x, x_0, \gamma)^{-1}$ が 1 位の極をもつ．しかも留数行列の階数が 1 以下でなければならない．実際，階数が 2 以上だとすると，$\det \Psi(x, x_0, \gamma)^{-1}$ が $\gamma_s(x)$ において 2 位以上の極をもつことになるが，これはその点で $\det \Psi(x, x_0, \gamma)$ が 2 位以上の零点をもつことを意味するので，$\gamma_s(x)$ が $\det \Psi(x, x_0, \gamma)$ の単純零点であるという現在の設定に矛盾する．これから $A(x, x_0, \gamma)$ 自体についても同じことが言える．$A(x, x_0, \gamma)dz$ の留数行列（階数 1 以下になる）を二つのベクトルによって ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ とあらわせば，それが求めるものである．

4. 最後に $x \to x_0$ において $\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ が $\boldsymbol{\alpha}_s(x_0)$ に近づくことを確かめる．A の定義式から

$$A(x_0, x_0, \gamma) = \partial_x \Psi(x, x_0, \gamma)|_{x=x_0}$$

という等式が得られるが，$\gamma \to \gamma_s(x_0)$ において両辺の行列の最初の行を比較すれば，いずれも $(z-\gamma_s(x_0))^{-1}$ の項から始まり，その係数は左辺においては $\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{\alpha}_s(x)$（極限があるとして）に比例するベクトル，右辺においては $\boldsymbol{\alpha}_s(x_0)$ に比例するベクトルとなる．したがって

$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{\alpha}_s(x) \propto \boldsymbol{\alpha}_s(x_0)$$

とならざるを得ないが，ベクトルの最後の成分は 1 に正規化してあるので，結局等式が成り立つ．

（証明終わり）

このようにして，行列 $A(x, x_0, \gamma)$ の極のデータから x に依存して動く Tyurin パラメータ $(\gamma_s(x), \boldsymbol{\alpha}_s(x)) \in \Gamma \times \mathbf{P}^{r-1}$, $s = 1, \ldots, rg$, が取り出される．これらは $r = 1$ の場合の Baker-Akhiezer 函数の零点因子に相当するものである．$r = 1$ の場合の Baker-Akhezer 函数の零点因子の運動は Jacobi 多様体の上の直線運動に対応するが，$r > 1$ の場合には Jacobi の逆問題に相当する枠組は知られていない．

そもそも $r > 1$ の場合には，代数的スペクトルデータに函数パラメータが現れるように，問題は本質的に無限自由度を内包しているので，Jacobi 多様体のような有限次元的枠組だけで話が閉じると期待するのは難しい．むしろ KP 的時間発展を入れたときに得られるのは KdV 方程式自体のような無限自由度系（望むらくは偏微分方程式）であると考えられる．

通常そのような系は零曲率方程式によって定式化される．Krichever と Novikov は実際にそのような零曲率方程式を定式化する方向に話を進める．そこでは上の議論の途中で登場した行列型線形微分方程式

$$\partial_x \Psi = A\Psi$$

（これをいわゆる「補助線形問題」とみなす）に加えて時間発展を記述する方程式

$$\partial_{t_n} \Psi = A_n \Psi$$

を連立させて零曲率方程式系

$$[\partial_{t_k} - A_k,\ \partial_x - A] = 0, \quad [\partial_{t_k} - A_k,\ \partial_{t_\ell} - A_\ell] = 0$$

を導くことを考える．その際，A_ℓ についても A と同様の構造（Γ 上の有理型函数から構成され，Tyurin パラメータで記述される極構造をもつ）を要求する．それによって矛盾のない零曲率方程式を得る，というのが Krichever と Novikov[11, 12] のシナリオである．この考え方は Krichever の最近の論文 [9] にも受け継がれている．

8 Tyurin パラメータの x 依存性に関する方程式

時間発展の話に進む前に，可換微分作用素環から導出される状況でもうひとつ述べておくべきことがある．それは Tyurin パラメータの x 依存性と A を係数とする線形微分方程式

$$\partial_x \Psi = A\Psi \tag{8.1}$$

の関係についてである．

今の場合むしろ Ψ が先にあって，そこから A を定義したわけだが，改めて微分方程式として眺めるとき，この方程式は係数がパラメータ $\gamma=(z,w)$ について $\gamma_s(x)$ に特異点（1 位の極）をもつ一方，解の方は γ に関して同じ点で正則である，という特徴をもつ．これは線形常微分方程式で「見かけの特異点」と呼ばれる状況に似ている．ただし，今は x に関する微分方程式においてパラメータ γ に関する特異点の有無を議論しているので，常微分方程式の場合の概念と直接の関係はない[4]．そもそも γ のみの函数を解に掛けることは自由にできるので，それによって解にいくらでも新たな特異点をもたせることができる（今はそのようなさまざまな解の中から $\Psi|_{x=x_0}=I$ という条件によって特定の解を選んでいることになる）．問題は x に依存して動く特異点である．そのような特異点を解に勝手に生じさせることはできない（x に依存するものを掛ければ一般には微分方程式の解ではなくなる[5].）

一般に，上の形の微分方程式の係数行列がパラメータ空間で x に依存して動く極をもち，しかも行列解の方はそこに特異点をもたないならば，極の位置およびそれに付随するいくつかの量は x の函数としてある方程式を満たさなければならない，ということがわかる．このことを $A=A(x,x_0,\gamma)$ の場合について確かめてみよう．

まず Ψ の微分方程式から $\det\Psi$ の方程式

$$\partial_x \log\det\Psi = \operatorname{Tr} A$$

が出てくる．$P=\gamma_s(x)$ の近傍では

$$\log\det\Psi(x,x_0,\gamma) = \log(z - z(\gamma_s(x)) + O(1)$$

となるが，前節で示したことから

$$\operatorname{Tr} A = \frac{\operatorname{Tr}({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x))}{z - z(\gamma_s(x)} + O(1)$$

であるから，主導項を比較して

$$\partial_x z(\gamma_s(x)) + \operatorname{Tr}({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)) = 0$$

という式が成立することがわかる．これが $\gamma_s(x)$ の満たすべき必要条件である．ちなみにトレースの部分は $\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ と ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)$ の積に等しいから

$$\partial_x z(\gamma_s(x)) + \boldsymbol{\alpha}_s(x)\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x) = 0$$

と書いてもよい．

方向ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ についても非自明な条件が現れる．それを見るために Ψ, A を $\gamma_s(x)$ の近くで

$$\begin{aligned}\Psi(x,x_0,\gamma) &= \Psi_{s,0}(x) + \Psi_{s,1}(x)(z - z(\gamma_s(x)) + \cdots,\\ A(x,x_0,\gamma) &= \frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)}{z - z(\gamma_s(x))} + A_{s,1}(x) + \cdots,\end{aligned}$$

[4] Γ 上の行列型線形常微分方程式に対して見かけの特異点を Tyurin パラメータとして扱うことはできる．実際，Krichever はそのような枠組でモノドロミー保存変形を論じている [10].

[5] ちなみに，解に特別な行列を掛けて同じ形の方程式（係数は一般には異なる）の解をつくる，というのが Schlesinger 変換や Bäcklund 変換に他ならない.

というように Laurent 展開して（係数は x の函数からなる行列である）微分方程式に代入すると，-1 次と 0 次の項からそれぞれ

$$ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)\Psi_{s,0}(x) = 0 $$

および

$$ \partial_x\Psi_{s,0}(x) - \Psi_{s,1}(x)\partial_x z(\gamma_s(x)) = A_{s,1}(x)\Psi_{s,0}(x) + {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)\Psi_{s,1}(x), $$

という等式が得られる．これらの式から次のことがわかる．

1. 第一式は $\boldsymbol{\alpha}_s(x)\Psi_{s,0}(x) = 0$ と同値で（A は $\gamma_s(x)$ で実際に極をもつから，${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)$ はゼロベクトルではない），$\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ が $\Psi_{s,0}(x)$ の左零ベクトルであることを意味する．$\det\Psi(x,x_0,\gamma)$ の $\gamma_s(x)$ における零点は 1 位なので，$\Psi_{s,0}(x)$ の左零空間は 1 次元であり，したがって $\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ はその基底となる．

2. 第二式に左から $\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ を掛けると，左辺から

$$ \begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}_s(x)(\partial_x\Psi_{s,0}(x) - \Psi_{s,1}(x)\partial_x z(\gamma_s(x)) \\ &\quad= \partial_x(\boldsymbol{\alpha}_s(x)\Psi_{s,0}(x)) - \partial_x\boldsymbol{\alpha}_s(x)\cdot\Psi_{s,0}(x) + \boldsymbol{\alpha}_s(x)\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)\Psi_{s,1}(x) \\ &\quad= -\partial_x\boldsymbol{\alpha}_s(x)\cdot\Psi_{s,0}(x) + \boldsymbol{\alpha}_s(x)\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)\Psi_{s,1}(x) \end{aligned} $$

   が得られる．ここですでに得た等式 $\partial_x z(\gamma_s(x)) + \boldsymbol{\alpha}_s(x)\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x) = 0$ を利用した．他方，右辺から

$$ \begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}_s(x)(A_{s,1}(x)\Psi_{s,0}(x) + {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)\Psi_{s,1}(x)) \\ &\quad= \boldsymbol{\alpha}_s(x)A_{s,1}(x)\Psi s,0(x) + \boldsymbol{\alpha}_s(x)\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)\Psi_{s,1}(x) \end{aligned} $$

   が得られる．これらを等値して

$$ (\partial_x\boldsymbol{\alpha}_s(x) + \boldsymbol{\alpha}_s(x)A_{s,1}(x))\Psi_{s,0}(x) = 0 $$

   が成立することがわかる．ところで，上で注意したように，$\Psi_{s,0}(x)$ の左零空間は $\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ で張られている．したがって，あるスカラー量 $\kappa_s(x)$ が存在して

$$ \partial_x\boldsymbol{\alpha}_s(x) + \boldsymbol{\alpha}_s(x)A_{s,1}(x) = \kappa_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x) $$

   が成立しなければならない．これが $\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ の満たすべき必要条件である．$\kappa_s(x)$ はこの方程式自体によって決まる．実際，前節で示したように $\boldsymbol{\alpha}_s(x)$ を最後の成分が 1 に等しいように正規化しておけば，このベクトルの方程式の最後の成分は $\kappa_s(x)$ を決める式となる．それをもとの方程式に代入すれば $\boldsymbol{\alpha}_s$ の他の成分に関する方程式が最終的に得られる．

ここまでの議論を振り返れば，そこで使っているのは局所的性質だけであり，大域的性質や可換微分作用素対の同時固有函数系に関わることは必要ではない：

1. $A = A(x, x_0, \gamma)$ は γ について $\gamma_s(x)$ の近傍で定義された有理型函数の行列であり，$\gamma_s(x)$ で 1 位の極をもつ．この極における Laurent 展開は

$$A = \frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)}{z - z(\gamma_s(x))} + A_{s,1}(x) + O(z - z(\gamma_s(x)))$$

という形になる．

2. $\Psi = \Psi(x, x_0, \gamma)$ は $\gamma_s(x)$ の近傍で定義された正則函数の行列であり，微分方程式 $\partial_x \Psi = A\Psi$ を満たす．さらに，その行列式 $\det \Psi(x, x_0, \gamma)$ は $\gamma_s(x)$ で 1 位の零点をもつ．

これから二組の関係式

$$\partial_x(\gamma_s(x)) + \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x)) = 0, \tag{8.2}$$

$$\partial_x \boldsymbol{\alpha}_s(x) + \boldsymbol{\alpha}_s(x) A_{s,1}(x) = \kappa_s(x)\boldsymbol{\alpha}_s(x) \tag{8.3}$$

が従う，というのが上の議論の帰結である．Krichever と Novikov が示しているように，じつは逆も言える（逆についての証明は原論文 [12, 9] に譲る）：

定理 4 上のような係数行列をもつ微分方程式 $\partial_x \Psi = A\Psi$ に対して，$\gamma_s(x)$ の近傍で正則で，行列式が $\gamma_s(x)$ において 1 位の零点をもつような行列解があるための必要十分条件は *(8.2)* と *(8.3)* が成立することである．

9 時間発展

形式的 Baker-Akhiezer 函数の定義に登場した擬微分作用素 S から

$$L = \partial_x + g_2(x)\partial_x^{-1} + g_3(x)\partial_x^{-2} + \cdots = S\partial_x S^{-1} \tag{9.1}$$

と構成される擬微分作用素は KP 階層の Lax 作用素に他ならない．Q, P はこれを用いて

$$Q = L^m, \quad P = p(L)$$

とあらわされる．左辺はもちろん微分作用素なので，これは KP 階層に

$$(L^m)_{<0} = (p(L))_{<0} = 0 \tag{9.2}$$

という拘束条件を課したものとみなせる．ここで $(\quad)_{<0}$ は ∂_x の負べきからなる部分を取り出すことをあらわす．

$t = (t_1, t_2, \ldots)$ を時間変数の組とする．t_1 は x と同一視できるのでそうすることも多いが，ここでは強調のため敢えて別扱いとする．以下，記号を重くしないため，x, t の函数では，特に必要がない限り，x, t 依存性を明示的に書かないことにする．L を KP 階層の Lax 方程式系

$$\partial_{t_k} L = [B_k, L], \quad B_k = (L^k)_{\geq 0}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9.3}$$

に従って時間発展させるとき Q, P は可換微分作用素対のまま時間発展する．ここで $(\quad)_{\geq 0}$ は ∂_x の非負べき部分（つまり微分作用素の部分）を取り出すことをあらわす．Q, P の時間発展はやはり Lax 方程式

$$\partial_{t_k} Q = [B_k, Q], \quad \partial_{t_k} P = [B_k, P] \tag{9.4}$$

に従う．なお B_k の間ではいわゆる Zakharov-Shabat 方程式（微分作用素に関する一種の零曲率方程式）

$$[\partial_{t_k} - B_k,\ \partial_{t_\ell} - B_\ell] = 0 \tag{9.5}$$

が成立する．

9.1 二種類の行列形式

この KP 型時間発展を行列型の Lax 方程式系あるいは零曲率方程式系に書き直すことができる．これには次の二通りの形式がある．

1. $m \times m$ 行列の Lax・零曲率方程式系．行列要素は z の多項式である．

2. $r \times r$ 行列の零曲率方程式．行列要素は Γ 上の有理型函数である．

第一の形式はすでに導入した $m \times m$ 行列 $V(x, z)$ （今の場合は t にも依存する行列 $V(x, t, z)$ になる）に基づくもので，KdV 方程式の 2×2 行列形式（たとえば田中・伊達の本 [25] 参照）の拡張に他ならない．P から Q による割り算によってこの行列（x, t は明示しないで $V(z)$ と略記しよう）を得たように，B_k から同様の割り算によって行列 $U_k(z)$ を定めることができる．これは $Q\psi = z\psi$ の任意の解に対して

$$\begin{pmatrix} B_k\psi \\ \partial_x B_k\psi \\ \vdots \\ \partial_x^{m-1} B_k\psi \end{pmatrix} = U_k(z) \begin{pmatrix} \psi \\ \partial_x\psi \\ \vdots \\ \partial_x^{m-1}\psi \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

という等式をみたす行列として特徴づけられる．$U(z)$ と同様にこれも z の多項式を要素とする行列である．これを用いて Q に対する Lax 方程式を書き直して行くと，最終的に

$$\partial_{t_k} V(z) = [U_k(z), V(z)] \tag{9.7}$$

という Lax 方程式ならびにそれに付随する零曲率方程式

$$[\partial_{t_k} - U_k(z),\ \partial_{t_\ell} - U_\ell(z)] = 0 \tag{9.8}$$

が得られる．特に，スペクトル曲線の定義多項式 $f(z, w)$ の係数が t にも依らない定数であること（したがってスペクトル曲線は KP 階層の時間発展で不変であること）がわかる，以下ではこの $m \times m$ 行列形式を直接に利用する場面はないので，これ以上の説明は省く．

第二の形式が Tyurin パラメータに関わるもので，すでに見た行列 $A = A(\gamma)$ と同様の構造をもつ（ただし γ_∞ では高位の極をもつ）一連の $r \times r$ 行列 $A_k(\gamma)$ に対する零曲率方程式系

$$[\partial_{t_k} - A_k(\gamma),\ \partial_{t_\ell} - A_\ell(\gamma)] = 0$$

で与えられる（$A(\gamma)$ は $A_1(\gamma)$ に一致する）．こちらでは $V(z)$ に相当するものはなく，零曲率方程式のみの構成となる．以下ではこの第二の形式について説明する．

9.2 $A_k(\gamma)$ の構成

$m \times m$ 行列形式は $Q\psi = z\psi$ の解への微分作用素の作用を行列に翻訳するものであった．$r \times r$ 行列表示は同様の意味で (Q, P) の同時固有函数への微分作用素の作用を行列で表示することにより得られる．$V(z)$ に相当する行列がないのはそのためである（同時固有函数への P, Q の作用はスカラー行列 zI, wI で表現される）．目標の行列 $A_k(\gamma)$ は固有値対 $\gamma = (z, w)$ の任意の同時固有函数 ψ に対して

$$\begin{pmatrix} B_k\psi \\ \partial_x B_k\psi \\ \vdots \\ \partial_x^{r-1} B_k\psi \end{pmatrix} = A_k(\gamma) \begin{pmatrix} \psi \\ \partial_x\psi \\ \vdots \\ \partial_x^{r-1}\psi \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

という等式が成立するように定義される．このとき同時固有函数系 $\psi_k(\gamma)$ を並べたベクトル $\boldsymbol{\psi}(\gamma) = (\psi_0(\gamma), \ldots, \psi_{r-1}(\gamma))$ と Wronski 行列 $\Psi(\gamma)$ に対して

$$\begin{pmatrix} B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma) \\ \partial_x B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma) \\ \vdots \\ \partial_x^{r-1} B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma) \end{pmatrix} = A_k(\gamma)\Psi(\gamma)$$

という等式も成立する．これから $A_k(\gamma)$ の一意性は明らかであろう．

上のような行列 $A_k(\gamma)$ が実際に存在することは微分作用素の割り算を考えればすぐにわかる．割り算に用いられるのは

$$G = \partial_x^r - a_1\partial_x^{r-2} - \cdots - a_r \tag{9.10}$$

という微分作用素である．これは $\psi_0, \ldots, \psi_{r-1}$ を同次解の基本系とする微分作用素だったことを思い出されたい[6]．ちなみに，$m \times m$ の場合の場合には Q による割り算を行ったが，そこで考えたのは Q の同次解ではなくて方程式 $Q\psi = z\psi$ の解だから，状況は今の場合と異なる．$\partial_x^j B_k$ を G で割り算したものを

$$\partial_x^j B_k = C_{j,k}G + \sum_{\ell=0}^{r-1} a_{k,j\ell}\partial_x^\ell \tag{9.11}$$

[6] Previato と Wilson [21] はこれが Q, P の微分作用素としての GCD（operator GCD）であることを注意している．これは興味深い見方で，その後 Latham との研究 [13] などにも発展しているが，ここでは立ち入らない．

とあらわすとき，剰余項の係数を並べた行列

$$A_k(\gamma) = \begin{pmatrix} a_{k,00} & a_{k,01} & \cdots & a_{k,0,r-1} \\ a_{k,10} & a_{k,11} & \cdots & a_{k,1,r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,r-1,0} & a_{k,r-1,1} & \cdots & a_{k,r-1,r-1} \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

が求めるものである．たとえば $k=1$ の場合には，$B_1 = \partial_x$ なので，この割り算は

$$\begin{aligned} \partial_x &= 0 \cdot G + \partial_x, \\ &\vdots \\ \partial_x^{r-1} &= 0 \cdot G + \partial_x^{r-1}, \\ \partial_x^r &= 1 \cdot G + a_1 \partial_x^{r-1} + \cdots + a_r \end{aligned}$$

となって

$$A_1(\gamma) = A(\gamma) \tag{9.13}$$

がわかる．おかげで今の設定でも t_1 と x を同一視できる．

しかしこの構成法では，$A_k(\gamma)$ が Γ 上の有理型函数の行列で γ_∞ と $\gamma_s(x,t)$, $s = 1, \ldots, rg$（時間発展を考えているので $A(\gamma)$ の極は t にも依存する）にのみ極をもつ，ということはすぐわかるが，極における振る舞いなど詳しいことはもうすこし詳しい議論を経ないとわからない．

9.3 $A_k(\gamma)$ の極に関する性質

$A_k(\gamma)$ を求めるためにこのような割り算を実行することは実際には不要である．同時固有函数 ψ に対して微分作用素を作用させてから，方程式 $G\psi = 0$ を用いて高階の導函数を消去し，ψ の $r-1$ 階までの導函数の函数係数１次結合であらわす，という計算を行えばよい[7]．

そこでまず ∂_x^k の作用の行列表示，すなわち

$$\partial_x^k \Psi(\gamma) = D_k(\gamma)\Psi(\gamma), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9.14}$$

という行列 $D_k(\gamma)$ （その存在は上と同じ議論でわかる）の性質を調べることにする．$D_0(\gamma) = I$ とおけば，$D_k(\gamma)$ は

$$D_{k+1}(\gamma) = \partial_x D_k(\gamma) + D_k(\gamma)A(\gamma) \tag{9.15}$$

という漸化式に従う．$D_1(\gamma) = A(\gamma)$ となることに注意されたい．$A(\gamma)$ は Γ 上の有理型函数の行列で，γ_∞ と $\gamma_s(x,t)$, $s = 1, \ldots, rg$, において極をもち他では正則だが，この漸化式によって $D_k(\gamma)$ も同じ性質をもつことがただちにわかる．さらに，B_k を

$$B_k = \partial_x^k + b_{k,2}\partial_x^{k-2} + \cdots + b_{k,k}$$

[7] $m \times m$ の行列表示の定式化に微分作用素の割り算を使う本当の目的は漸化式や母函数をつくることにある（田中・伊達の本 [25] 参照）．今の場合には G 自体が $\gamma = (z,w)$ の複雑な有理型函数を係数に含んでいて，手軽な漸化式や母函数をつくることが難しい．もっとも，この方向をもう少し追求する価値はあるだろう．

とあらわせば（$b_{k,2},\dots,b_{k,k}$ は x,t の函数），$A_k(\gamma)$ は

$$A_k(\gamma)=D_k(\gamma)+b_{k,2}D_{k-2}(\gamma)+\cdots+b_{k,k} \tag{9.16}$$

とあらわせる．したがって，$A_k(\gamma)$ も Γ 上の有理型函数の行列で，$A(\gamma)$ と同じ位置に極をもつ，ということがわかる．

$\gamma_s(x,t)$ における $D_k(\gamma)$ の振る舞いについてはさらに詳しく次のことが示せる．

補題 5 $D_k(\gamma)$, $k=1,2,\dots,$ は Γ 上の有理型函数の行列で，γ_∞ と $\gamma_s(x,t)$, $s=1,\dots,rg,$ に極をもち，他の点では正則である．$\gamma_s(x,t)$ での極は 1 位であり，そこで

$$D_k(\gamma)=\frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_{D_k,s}(x,t)\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)}{z-z(\gamma_s(x,t))}+O(1) \tag{9.17}$$

と振る舞う．ここで $\boldsymbol{\beta}_{D_k,s}(x,t)$ は x,t に依存する行ベクトルである．

証明 k についての帰納法による．$D_1(\gamma)=A(\gamma)$ についてはすでにわかっている．さらに (8.2) と (8.3) が成立していることも思い出しておく．$D_k(\gamma)$ まで補題の主張が成り立つと仮定する．このとき，$D_{k+1}(\gamma)=\partial_x D_k(\gamma)+D_k(\gamma)A(\gamma)$ の右辺の各項はそれぞれ $\gamma\to\gamma_s(x,t)$ で

$$\begin{aligned}\partial_x D_k(\gamma) &= \frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_{D_k,s}(x,t)\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)\partial_x\gamma_s(x,t)}{(z-\gamma_s(x,t))^2}\\ &\quad+\frac{(\partial_x\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_{D_k,s}(x,t))\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)+{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_{D_k,s}(x,t)\partial_x\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)}{z-\gamma_s(x,t)}+O(1)\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}D_k(\gamma)A(\gamma) &= \frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_{D_k,s}(x,t)\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x,t)\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)}{(z-\gamma_s(x,t))^{-2}}\\ &\quad+\frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_{D_k,s}(x,t)\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)A_{s,1}(x,t)+D_{k,s,1}(x,t)\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_s(x,t)\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)}{z-\gamma_s(x,t)}+O(1)\end{aligned}$$

と振る舞う．ここで $D_{k,s,1}(x,t)$ は $D_k(\gamma)$ の $\gamma_s(x,t)$ における Laurent 展開の定数項をあらわす．これらを加えると，$(z-\gamma_s(x,t))^{-2}$ の係数は (8.2) によって打ち消しあう．また，$(z-\gamma_s(x,t))^{-1}$ の係数の中で列ベクトルと $\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)$ の積の形になっていない項同士も (8.3) によって打ち消しあう．こうして $D_{k+1}(\gamma)$ が期待通りの振舞いをすることがわかる．(証明終わり)

この結果と $A_k(\gamma)$ を $D_k(\gamma)$, $D_{k-2}(\gamma)$, … であらわす式から，最終的に，$A_k(\gamma)$ が $A(\gamma)$ と同様の性質をもつことがわかる：

定理 5 $A_n(\gamma)$ は γ について Γ 上の有理型函数の行列で，γ_∞ と $\gamma_s(x,t)$, $s=1,\dots,rg,$ において極をもち，他では正則である．$\gamma_s(x,t)$ における極は 1 位であり，そこで

$$A_k(\gamma)=\frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_{k,s}(x,t)\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)}{z-z(\gamma_s(x,t))}+O(1) \tag{9.18}$$

と振る舞う．ここで $\boldsymbol{\beta}_{k,s}(x,t)$ は x,t に依存する行ベクトルである．

9.4 線形微分方程式と零曲率方程式

Q, P の Lax 方程式から同時固有函数系 $\psi_k(\gamma)$ が時間変数について満たす微分方程式を導くことができる．まず $Q\boldsymbol{\psi}(\gamma) = z\boldsymbol{\psi}(\gamma)$ を t_k について微分すると

$$(\partial_{t_k} Q)\boldsymbol{\psi}(\gamma) + Q\partial_{t_k}\boldsymbol{\psi}(\gamma) = z\partial_{t_k}\boldsymbol{\psi}(\gamma)$$

となるが，Q に対する Lax 方程式 $\partial_{t_k} Q = [B_k, Q]$ を用いてこれを変形すれば

$$(Q - z)(\partial_{t_k}\boldsymbol{\psi}(\gamma) - B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma)) = 0$$

となる．同様に $P\boldsymbol{\psi}(\gamma) = w\boldsymbol{\psi}(\gamma)$ から

$$(P - w)(\partial_{t_k}\boldsymbol{\psi}(\gamma) - B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma)) = 0$$

が得られる．これは $\partial_{t_k}\boldsymbol{\psi}(\gamma) - B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma)$ の各成分がやはり固有値対 (z, w) の同時固有函数であること，したがって同時固有函数系 $\psi_k(\gamma)$ の 1 次結合（係数は x に依らない）となることを意味する．言い換えれば

$$\partial_{t_k}\boldsymbol{\psi}(\gamma) - B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma) = -\boldsymbol{\psi}(\gamma)M_k(\gamma), \quad \partial_x M_k(\gamma) = 0, \tag{9.19}$$

という行列 $M_k(\gamma)$（x 以外の時間変数には依存する）が存在する．

最後の方程式を x で $r-1$ 階まで微分したものを並べれば Wronski 行列 $\Psi(\gamma)$ に対する方程式

$$\partial_{t_k}\Psi(\gamma) = \begin{pmatrix} B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma) \\ \partial_x B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma) \\ \vdots \\ \partial_x^{r-1} B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma) \end{pmatrix} - \Psi(\gamma)M_k(\gamma)$$

になる．右辺第 1 項を $A_k(\gamma)$ によって書き直せば

$$\partial_{t_k}\Psi(\gamma) = A_k(\gamma)\Psi(\gamma) - \Psi(\gamma)M_k(\gamma) \tag{9.20}$$

という方程式が得られる．さらに，$\Psi(\gamma)$ が以前のように $\Psi(\gamma)|_{x=x_0} = I$ と正規化されていれば，この式の両辺を $x = x_0$ へ制限することによって

$$M_k(\gamma) = A_k(\gamma)|_{x=x_0} \tag{9.21}$$

という関係が成立していることがわかる（$\partial_{t_k}\Psi(\gamma)|_{x=x_0} = 0$ に注意）．

$\Psi(\gamma)$ に対する方程式の右辺第 2 項がやや目障りだが，$\Psi(\gamma)$ に右から適当な行列 $C(\gamma)$ を掛けたもの

$$\widetilde{\Psi}(\gamma) = \Psi(\gamma)C(\gamma) \tag{9.22}$$

はこの項をもたない方程式

$$\partial_{t_k}\widetilde{\Psi}(\gamma) = A_k(\gamma)\widetilde{\Psi}(\gamma) \tag{9.23}$$

を満たすことがわかる．この補正行列 $C(\gamma)$ の存在は $M_k(\gamma)$ が次のような零曲率方程式を満たすことから従う．

補題 6 $M_k(\gamma)$ は零曲率方程式

$$[\partial_{t_k} - M_k(\gamma),\ \partial_{t_\ell} - M_\ell(\gamma)] = 0 \tag{9.24}$$

を満たす.

証明 $\boldsymbol{\psi}(\gamma)$ が t_k について満たす方程式

$$\partial_{t_k}\boldsymbol{\psi}(\gamma) = B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma) - \boldsymbol{\psi}(\gamma)M_k(\gamma)$$

を t_ℓ で微分し，t_ℓ に関する同じ形の方程式を用いて変形すると

$$\begin{aligned}
\partial_{t_\ell}\partial_{t_k}\boldsymbol{\psi}(\gamma) &= \partial_{t_\ell}(B_k\boldsymbol{\psi}(\gamma) - \boldsymbol{\psi}(\gamma)M_k(\gamma)) \\
&= \frac{\partial B_k}{\partial t_\ell}\boldsymbol{\psi}(\gamma) + B_k\frac{\partial\boldsymbol{\psi}(\gamma)}{\partial t_\ell} - \frac{\partial\boldsymbol{\psi}(\gamma)}{\partial t_\ell} - \boldsymbol{\psi}(\gamma)\frac{\partial M_k(\gamma)}{\partial t_\ell} \\
&= \frac{\partial B_k}{\partial t_\ell}\boldsymbol{\psi}(\gamma) + B_k(B_\ell\boldsymbol{\psi}(\gamma) - \boldsymbol{\psi}(\gamma)M_\ell(\gamma)) \\
&\quad - (B_\ell\boldsymbol{\psi}(\gamma) - \boldsymbol{\psi}(\gamma)M_\ell(\gamma))M_k(\gamma) - \boldsymbol{\psi}(\gamma)\frac{\partial M_k(\gamma)}{\partial t_\ell}
\end{aligned}$$

となる．これと k, ℓ を入れ替えた式の辺々差をとり，B_k, B_ℓ に対する Zakharov-Shabat 方程式を用いて整理すると

$$\boldsymbol{\psi}(\gamma)(\partial_{t_k}M_\ell(\gamma) - \partial_{t_\ell}M_k(\gamma) + M_\ell(\gamma)M_k(\gamma) - M_k(\gamma)M_\ell(\gamma)) = 0$$

という等式を得る．括弧内は x に依らない量なので，$\psi_i(\gamma)$ 達の x の函数としての１次独立性によって括弧内の量がゼロであること，すなわち求める方程式が従う.（証明終わり）

この零曲率方程式によって

$$\partial_{t_k}C(\gamma) = M_k(\gamma)C(\gamma), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{9.25}$$

という連立微分方程式の解が，たとえば $C(\gamma)|_{x=x_0,t=0} = I$ という初期条件のもとで存在することが保証される．それを用いて $\widetilde{\Psi}(\gamma)$ を定義すれば，線形方程式 (9.23) が満たされる．特にその系として次が成り立つ.

定理 6 $A_k(\gamma)$ は零曲率方程式

$$[\partial_{t_k} - A_k(\gamma),\ \partial_{t_\ell} - A_\ell(\gamma)] = 0 \tag{9.26}$$

を満たす.

こうして，階数 r の可換微分作用素環を KP 階層で時間発展させること（あるいは，同じことだが KP 階層に可換微分作用素環の構造を拘束条件として課すこと）によってスペクトル曲線上の有理型函数の $r\times$ 行列の零曲率方程式系が得られることがわかった．Krichever と Novikov[12] はこの形の零曲率方程式の一般的な特徴を明らかにして，可換微分作用素環の場合に限らず通用する枠組を（当時はまだ原始的な形ではあったが）呈示している．そこでは後で触れるような Tyurin パラメータの満たす方程式が重要な役割を果たす.

さらに，Krichever と Novikov は特別な場合として $m=4$, $n=6$, $r=2$ の場合にこの零曲率方程式系（実際には本来の KP 方程式すなわち $1+2$ 次元の部分だけを考えた）を楕円函数を用いて具体的な形で書きあらわし，そこから KdV 方程式によく似た方程式

$$c_t = \frac{1}{4}c_{xxx} + \frac{3}{8}\frac{1-c_{xx}^2}{c_x} - \frac{3}{2}c_x^3\wp(2c) \tag{9.27}$$

が得られることを示している．ここで c は従属変数 $c=c(x,t)$，添字は $c_x = \partial_x c$, $c_t = \partial_t c$, $c_{xxx} = \partial_x^3 c$ というように導函数をあらわす．$\wp(z)$ はもちろん Weierstrass の $\wp$ 函数である．これがいわゆる Krichever-Novikov 方程式である．この方程式は $v=\wp(c)$ を従属変数として

$$v_t = \frac{v_x}{4}\left(\frac{v_{xxx}}{v_x} - \frac{3}{2}\frac{v_{xx}^2}{v_x^2}\right) + \frac{3}{8v_x}(4v^3 - g_2 v - g_3) \tag{9.28}$$

という有理的な形に書かれることも多い．右辺第 1 項に Schwarz 微分

$$\{v,x\} = \frac{v_{xxx}}{v_x} - \frac{3}{2}\frac{v_{xx}^2}{v_x^2}$$

が現れることが注目される．g_2, g_3 は $\wp$ 函数の満たす方程式 $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ の係数である．

Krichever-Novikov 方程式はこのような意味で KdV 方程式の一種の「楕円的類似」であるが，同様のことはその後 Mokhov [15] によって $m=6$, $n=9$, $r=3$ の場合にも実行された．そこからは Bousinesque 方程式に類似する方程式が現れる．

9.5 Tyurin パラメータとベクトル値 Baker-Akhiezer 函数

上の零曲率方程式の特別な場合として一方が $A_1(\gamma) = A(\gamma)$ の場合には，∂_{t_1} を ∂_x で置き換えてもよいので，

$$[\partial_{t_k} - A_k(\gamma),\ \partial_x - A(\gamma)] = 0 \tag{9.29}$$

という方程式が得られる．この方程式に対して $A_k(\gamma)$ と $A(\gamma)$ の $\gamma = \gamma_s(x,t)$ における Laurent 展開の主要部を代入し，$z - z(\gamma_s(x,t)$ の $-2,-1$ 次の部分を取り出すと（詳細は省くが），(8.2), (8.3) に相当する方程式

$$\partial_{t_n}\gamma_s(x,t) + \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_{k,s}(x,t)\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)) = 0, \tag{9.30}$$

$$\partial_{t_k}\boldsymbol{\alpha}_s(x,t) + \boldsymbol{\alpha}_s(x)A_{k,s,1}(x,t) = \kappa_{k,s}(x,t)\boldsymbol{\alpha}_s(x,t) \tag{9.31}$$

が得られる．ここで $A_{k,s,1}(x,t)$ は $A_k(\gamma)$ の Laurent 展開の定数項,

$$A_k(\gamma) = \frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_{k,s}(x,t)\boldsymbol{\alpha}_s(x,t)}{z - z(\gamma_s(x,t))} + A_{k,s,1}(x,t) + O(z - z(\gamma_s(x))),$$

また $\kappa_{k,s}(x,t)$ はスカラー量で，$\kappa_s(x,t)$ と同様，方程式自体によって決まる．

x についての線形微分方程式 $\partial_x\Psi = A\Psi$ の議論で触れたように，Tyurin パラメータに対するこれらの方程式は線形微分方程式 $\partial_{t_k}\widetilde{\Psi} = A_k\widetilde{\Psi}$ の解としての $\widetilde{\Psi}(\gamma)$ が $\gamma_s(x,t)$ にお

いて特異性をもたないということを意味している．このことにとどまらず，この方程式の係数行列の解析的性質から，$\widetilde{\Psi}(\gamma)$ の解析的性質をいろいろと引き出すことができる．特に，$\widetilde{\Psi}(\gamma)$ を $\widetilde{\Psi}(\gamma)|_{x=x_0,t=0} = I$ というように正規化しておけば（補正行列 $C(\gamma)$ の選び方でそのように調整できる），$\widetilde{\Psi}(\gamma)$ は γ_∞ と $\gamma_s(x_0,0)$, $s=1,\ldots,rg$, で特異点をもち，Γ の他の点では正則となることがわかる．詳しい考察（Krichever, Novikov[11, 12] などに譲る）によれば，γ_∞ は真性特異点であり，そこでの振る舞いは以前議論した行列 $\Psi_0(x,x_0,\kappa)$（Krichever の函数データ $w_2,\ldots,w_r$ を含む微分方程式の解として定義された）を t に依存する形に拡張したものによって記述される．他方，$\gamma_s(x_0,0)$ は 1 位の極であり，そこでの振る舞いは

$$\widetilde{\Psi}(\gamma) = \frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}_{\Psi,s}(x_0)\boldsymbol{\alpha}_s(x_0,0)}{z - z(\gamma_s(x_0,0))} + O(1) \tag{9.32}$$

というように Tyurin パラメータの初期値で記述される．

ちなみに，$\widetilde{\Psi}(\gamma)$ も最上行のベクトル $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\gamma)$ から x 導函数を下に並べた Wronski 行列の構造をしている（補正行列 $C(\gamma)$ は x については定数であることに注意）．上に述べた解析的性質は要するにこのベクトル値函数 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\gamma)$ の性質であるが，Krichever と Novikov はこのような性質をもつ函数を「ベクトル値 Baker-Akhierzer 函数」と呼んで，一般的な概念として定式化している．これはスカラー値の古典的な Baker-Akhiezer 函数 [7] と違ってテータ函数などでは書けない（と考えられている）もので，すでに触れたように，彼らはその存在を Riemann-Hilbert 問題 [8]（積分方程式に翻訳される）の解として保証している．

幾何学的に見れば，この問題には通常のテータ函数ではなくて階数 r の正則ベクトル束に伴う「非可換テータ函数」が必要と思われるが，非可換テータ函数の理論は未だに出来ていない[8]．もっとも，1980 年代後半以降の共形場理論の数学的理解の進展，特に一般種数の Riemann 面上の Wess-Zumino-Witten 模型とベクトル束のモジュライ空間との関係が明らかにされたこと（たとえば上野・清水の本 [27] とその参考文献を参照されたい）によって，この古くからある問題にも新たな手掛かりが見えているとも考えられる．

[8] 伊達の解説記事 [3] を収録している数理解析研究所講究録 No. 388（1980 年）は Abel 函数論の拡張の視点をモノドロミー保存変形，非可換テータ函数，ソリトン理論などに求める 1980 年の研究会「線型微分方程式の変形理論とアーベル函数論の拡張への新しい視点」の記録である．

参考文献

[1] E. Arbarello and C. De Contini, On a set of equations characterizing the Riemann matrices, Ann. Math. **120** (1984), 119–140.

[2] M. Audin コマの幾何学，共立出版 2000 年.（高崎金久訳）

[3] 伊達悦郎，可換微分作用素とベクトル束（Krichever の研究の紹介），数理解析研究所講究録 No. 388 (1980), 48–58.

[4] B.A. Dubrovin, V.B. Matveev, S.P. Novikov, Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties, Russian Math. Surveys **31:1** (1976), 59–146.

[5] B.A. Dubrovin, Theta functions and non-linear equations, Russ. Math. Surveys **36:2** (1981), 11-92. (Appendix by I.M Krichever)

[6] P.G. Grinevich, Rational solutions for the equations of commutation of differential operators, Funct. Anal. Appl. 16 (1982), 15–19.

[7] I.M. Krichever, Integration of nonlinear equations by the method of algebraic geometry, Funct. Anal. Appl. **11** (1977), 12–26; Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations, Russian Math. Surveys **32:6** (1977), 185–213.

[8] I.M. Krichever, Commutative rings of ordinary linear differential operators, Funct. Anal. Appl. **12** (1978), no. 3, 175–185.

[9] I.M. Krichever, Vector bundles and Lax equations on algebraic curves, Commun. Math. Phys. **229** (2002), 229–269.

[10] I. Krichever, Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations, arXiv:hep-th/0112096.

[11] I.M. Krichever and S.P. Novikov, Holomorphic vector bundles over Riemann surfaces and the Kadomtsev-Petviashvili equation. I, Funct. Anal. Appl. **12** (1978), no. 4, 276–286.

[12] I.M. Krichever and S.P. Novikov, Holomorphic bundles over algebraic curves, and nonlinear equations, Russian Math. Surveys 35 (1980), no. 6, 53–80.

[13] G.A. Latham and E. Previato, Darboux transforamtions for higher-rank Kadomtsev-Petviashvili equation and Krichever-Novikov equation, Acta Applicandae Mathematicae 39 (1995), 405–433.

[14] Y. Li and M. Mulase, Prym varieties and integrable systems, Commun. Anal. Geom. **5** (1997), 279–332.

[15] O.I. Mokhov, Commuting differential operators of rank 3 and nonlinear equations, Math. USSR Izvestiya **35** (1990), 629–655.

[16] M. Mulase, Cohomological structure in soliton equtions and jacobian varieties, J. Differential Geom. **19** (1984), 403–430.

[17] M. Mulase, Category of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional Grassmannians, Intern. J. Math. **1** (1990), 293–342.

[18] M. Mulase, Algebraic theory of the KP equation, in "Perspectives in Mathematical Physics", R. Penner and S.T. Yau (ed.) (Interscience, 1994), pp. 151–218.

[19] E. Previato, Seventy years of spectral curves: 1923–1993, in "Integrable Systems and Quantum Groups", Lect. Notes. Math. vol. 1620 (Springer-Verlag, 1996), pp. 419–481.

[20] E. Previato and G. Wilson, Vector bundles over curves and solutions of the KP equations, Proc. Symp. Pure Math. vol. 49, part I, pp. 553–569 (American Mathematical Society, 1989).

[21] E. Previato and G. Wilson, Differential operators and rank two bundles over elliptic curves, Compositio Math. 81 (1992), 107–119.

[22] M. Sato, Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmannian manifold, 数理解析研究所講究録 **439** (1981), 30–46; M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmannian manifold, Lecture Notes in Num. Appl. Anal., vol. 5, pp. 259–271 (Kinokuniya, Tokyo, 1982).

[23] G.B. Segal and G. Wilson, Loop groups and equations of KdV type, Publ. Math. IHES **61** (1985), 5–65.

[24] T. Shiota, Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations, Invent. Math. **83** (1986), 333–382.

[25] 田中俊一・伊達悦郎，KdV 方程式，紀伊国屋書店 1979 年.

[26] A. Tyurin, Classification of vector bundles over an algebraic curve of arbitrary genus, AMS Translations II, Ser. 63, pp. 245–279. (American Mathematical Society, 1967).

[27] 上野健爾・清水勇二，モジュライ理論 3，岩波書店 1999 年.

A　Krichever-Novikov 方程式に関連する文献

可換微分作用素環と KN 方程式

1. I.M. Krichever and S.P. Novikov, Holomorphic bundles and nonlinear equations. Finite-gap solutions of rank 2. Soviet Math. Dokl. 20 (1979), no. 4, 650–654.
2. I.M. Krichever and S.P. Novikov, Holomorphic bundles over algebraic curves, and nonlinear equations. Russian Math. Surveys 35 (1980), no. 6, 53–80.
3. P.G. Grinevich, Rational solutions for the equations of commutation of differential operators, Funct. Anal. Appl. 16 (1982), 15–19. （註：Krichever と Novikov の 1980 年の論文では階数 2 の可換な微分作用素対の計算に誤りがあった．この論文には正しい答が書いてある．）

対称性，微分作用素による Lax 表示，Hamilton 構造

1. V.V. Sokolov and S.I. Svinolupov, Evolution equations with nontrivial conservation laws, Funct. Anal. Appl. 16 (1982), 317–319. （註：対称性をもつ KdV 型の発展方程式の分類において KN 方程式が占める位置を明らかにした．）
2. S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov and Y.I. Yamilov, Bäcklund transformations for integrable evolution equations, Soviet Math. Dokl. 28 (1983), 165–168.
3. V.V. Sokolov, On the Hamiltonian property of the Krichever-Novikov equation, Soviet Math. Dokl. 30 (1984), 44–46. （註：この他にも Ufa のグループ— Sokolov, Svinolupov, Yamilov, 他— ではいろいろな研究が行われている．ちなみに，これらの研究では従属変数の変換によって有理化した形の方程式を扱う．）
4. I.Ya. Dorfman, The Krichever-Novikov equation and local symplectic structures. Soviet Math. Dokl. 38 (1989), no. 2, 340–343.
5. O.I. Mokhov, Canonical Hamiltonian representation of the Krichever-Novikov equation. Mat. Zametki 50 (1991), no. 3, 87–96, 158 (translated in Math. Notes 50 (1991), no. 3-4, 939–945).

階数 2 の (4,6) 可換対の構造

1. I.M. Krichever and S.P. Novikov, 上掲 Russian Math. Surveys 35 (1980), no. 6, 53–80 の論文.
2. P. Dehornoy, Opérateurs différentiels et coubres elliptiques, Compositio Math. 43 (1981), 71–99. （註：Verdier のアイディアに基づく，平面曲線からのアプローチ）
3. F.A. Grünbaum, Commuting pairs of linear ordinary differential operators of order four and six, Physica 31D (1988), 424–433. （註：Krichever, Novikov あるいは Dehornoy とも違うアプローチ）

4. F.A. Grünbaum, The Kadomtsev-Petriashvili equation: an elementary approach to the ‘rank 2’ solution of Krichever and Novikov. Phys. Lett. A139 (1989), 146–150. （註：スペクトル曲線が退化した場合を考えている）

5. E. Previato, Seventy years of spectral curves: 1923–1993, in “Integrable Systems and Quantum Groups”, Lect. Notes. Math. vol. 1620 (Springer-Verlag, 1996), pp. 419–481. （註：Lecture 3 で高階の可換微分作用素環についての Dehornoy や Grünbaum らの結果を紹介している．）

階数３の可換対

1. O.I. Mokhov, Commuting differential operators of rank 3 and nonlinear equations, Math. USSR Izvestiya 35 (1990), 629–655. （註：非常に詳しい．Krichever と Novikov の仕事についても簡潔に紹介している．）

operator GCD, Darboux 変換の視点

1. E. Previato and G. Wilson, Differential operators and rank two bundles over elliptic curves, Compositio Math. 81 (1992), 107–119. （註：operator GCD が初めて登場．）

2. G.A. Latham and E. Previato, Darboux transforamtions for higher-rank Kadomtsev-Petviashvili equation and Krichever-Novikov equation, Acta Applicandae Mathematicae 39 (1995), 405–433. （註：operator GCD と Darboux 変換を組み合わせて KP と KN の関係を論じている．）

3. G. Latham and E. Previato, Higher rank Darboux transformations, in “Singular Limi of Dispersive Waves”, N.M. Ercolani et al. (ed.), Nato ASI Series B: Physics vol. 320 (Prenum Press, NY, 1994), pp. 117–134.

少し毛色の変わった研究

1. F. Guil and M. Mañas, Loop algegras and Krichever-Novikov equation, Phys. Lett. A153 (1991), 90–94.

2. D.P. Novikov, Algebro-geometric solutions of the Krichever-Novikov equation, Theo. Math. Phys. 121 (1999), no. 3, 1567–1573.

3. S. Igonin and R. Martini, Prolongation structure of the Krichever-Novikov equation, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 9801-9810. arXiv:nlin.SI/0208006.

4. V. Adler, Bäcklund transformation for the Krichever-Novikov equation, Intern. Math. Res. Notices 1 (1998), 1–4.

5. F.W. Nijhoff, Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) System, arXiv: nlin.SI/0110027.

可換差分作用素環に基づく類似

1. I.M. Krichever and S.P. Novikov, Holomorphic bundles and commuting difference equations. One point construction. Russian Math. Surveys. 55 (2000), no. 1, 180–181; Holomorphic bundles and commuting difference equations. Two point construction. Russian Math. Surveys. 55 (2000), no. 3, 586–588.

2. I. Krichever and S. Novikov, Two-dimensional Toda lattice, commuting difference operators and holomorphic vector bundles, arXiv:math-ph/0308019.