

# Matrix-tree theorem の起源

高崎金久 (近畿大学理工学部)

Matrix-tree theorem (行列と木の定理) はグラフの全域木の個数がグラフに付随するある行列の行列式として表せることを主張する. この定理の原型は 19 世紀半ばの Sylvester, Borchardt, Kirchhoff の論文の中に見出せる. Sylvester と Borchardt はグラフ理論とはまったく別の問題に由来する行列式を論じたのだが, 結果としてそこにグラフ理論的内容が隠れていた. Borchardt の論文のグラフ理論的意味を明らかにしたのは木の数え上げに関する後年の Cayley の研究である. また, Kirchhoff は電気回路の方程式の解を Cramer の公式によって行列式の比として表し, それらの行列式の展開項を回路グラフの言葉で説明した. 特に分母の展開項は回路グラフの全域木 (正確に言えばその補集合) に対応する. それ故に行列と木の定理は Kirchhoff の定理と呼ばれることもある. その後, Maxwell の有名な電磁気学論考の第 3 版 (Maxwell の死語に J.J. Thomson を編者として出版された) に同様の内容が第 VI 章付録として付け加わり, Maxwell の公式としても知られるようになった. ただし, そこで用いられている行列 (グラフのラプラシアンの部分行列) は Kirchhoff の行列とは別のものであり, そこには公式の数学的証明も Kirchhoff の論文への言及もない. 今日では行列と木の定理は Maxwell 流にグラフのラプラシアンを用いて定式化される. その証明は 20 世紀半ばの Tutte らの論文によって完成したと思われる.

1. J. J. Sylvester, Quart. J. Pure Appl. Math., (1857), pp. 42-56.
2. C. W. Borchardt, J. Reine Angew. Math., 57 (1860), pp. 111-121.
3. G. Kirchhoff, Ann. Physik Chemie, 72 (1847), pp. 497-508.
4. J. C. Maxwell, Electricity and Magnetism, Clarendon Press, Oxford, 1892. Reprinted by Dover, New York.



# 線形代数と 数え上げ

著 高崎金久  
Takasaki Kanehisa

線形代数の道具を駆使して  
さまざまな数え上げ問題を解く  
代数的組合せ論への招待



日本評論社

古くて新しい  
数え上げの  
世界へ  
ようこそ



# 線形代数と ネットワーク

著 高崎金久  
Takasaki Kanehisa

典型的なネットワークである電気回路から、  
ネットワークを背後に隠した  
全正値行列や円代数にいたるまで、  
幅広い題材を駆使して  
線形代数とネットワーク理論の  
関係を解説する



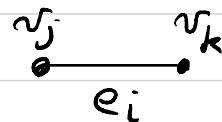
日本評論社

線形代数の  
エンジンで  
ネットワーク  
をかけめぐる

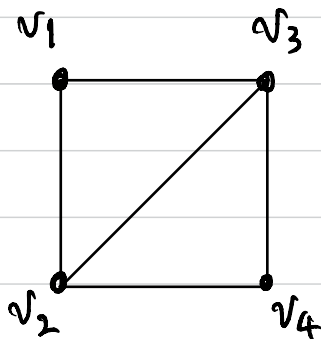
# (無向) グラフ

- 頂点  $v_1, \dots, v_n$
- 辺  $e_1, \dots, e_m$

$$e_i = (v_j, v_k)$$



例

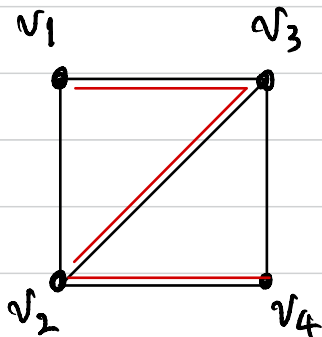


- $v_j$  と  $v_k$  は **隣接** している (隣接関係)  
→ 行列で表現できる
- $v_j$  と  $e_i$  は **接続** している (接続関係)  
→ 行列で表現できる

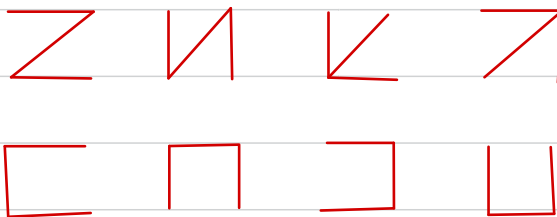
# 全域木 (spanning tree)

閉路を含まず, すべての頂点を覆う連結部分グラフ

例



全域木の1つ. このグラフには 全部で  
8通りの全域木がある.

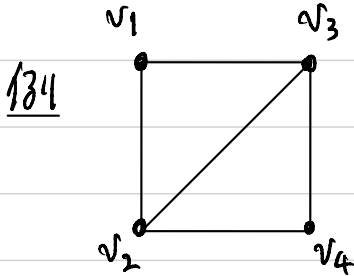




## ラフレーション行列

$$L = (L_{ij})_{i,j=1}^n,$$

$$L_{ij} = \begin{cases} -1 & (i \neq j, v_i \text{ と } v_j \text{ は隣接している}) \\ 0 & (i \neq j, v_i \text{ と } v_j \text{ は隣接していない}) \\ d_i & (i = j, d_i \text{ は } v_i \text{ に接続する辺の数}) \end{cases}$$



$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 行列と木の定理 (Matrix-Tree theorem)

$L$  の  $(i, j)$  余因子  $(-1)^{i+j} \det L^{(i, j)}$  は

グラフの全域木の個数に等しい。

←  $L$  から  $i$  行と  $j$  列を  
除去した行列

**注意** ゼロサム性  $\sum_{j=1}^n L_{ij} = 0, \sum_{i=1}^n L_{ij} = 0$  かつ

余因子の値は  $i, j$  によらない。また  $\det L = 0$  である。

## 行列と木の定理 (重みつき)

重みつきラッパン行列  $L = (L_{ij})_{i,j=1}^n$  を

$$L_{ij} = \begin{cases} -w_{ij} = -w_{ji} & (i \neq j) \\ \sum_{k \neq i} w_{ik} & (i = j) \end{cases}$$

と定めれば,

$$(-1)^{i+j} \det L^{(i,j)} = \sum_{T: \text{全域木}} \prod_{(i,j): T \text{ の辺}} w_{ij}$$

# 行列と木の定理の歴史

## 原型

1. J. J. Sylvester, Quart. J. Pure Appl. Math., (185<sup>7</sup>~~5~~), pp. 42-56.
2. C. W. Borchard, J. Reine Angew. Math., 57 (1860), pp. 111-121.
3. G. Kirchhoff, Ann. Physik Chemie, 72 (1847), pp. 497-508.
4. J. C. Maxwell, Electricity and Magnetism, Clarendon Press, Oxford, 1892. Reprinted by Dover, New York.

} 数学

} 工学  
物理学

厳密な証明は Brooks, Smith, Stone, Tutte (1940) により完成

# Moon "Counting labelled trees" (1970), p42

Graph  
Laplacian

Theorem 5.2 is frequently called Maxwell's Rule (see Maxwell (1892) and, in particular, the appendix to Chapter 6 by the editor J. J. Thompson). Borchardt (1860), however, proved an equivalent result in the course of expressing the resultant of two polynomials in terms of their values at certain points. His expression involved a determinant of the same form as  $M_n(e)$ ; he showed that the determinant equalled a sum of the above type and he determined the number of terms in this expression (see also Dixon (1909)). Sylvester (1857) stated without proof a similar rule for expanding certain determinants called unisignants; Cayley referred to Sylvester's Rule in (1856) and to Borchardt's work in (1889). Kirchhoff (1847) gave a result dual to Theorem 5.2 in which a matrix determined by the cycles of  $G$  plays the role of  $A$  and the sum is over the products of edges forming the complement of a spanning tree of  $G$  (for discussions of these papers see, for example, Muir (1911), Ku (1952), Weinberg (1958a), and Chen (1968)). Brooks, Smith, Stone, and Tutte (1940) gave an inductive proof of Theorem 5.2 that was subsequently extended by Tutte (1948) to directed graphs; we shall describe his more general result later.

- Sylvester と Borchardt は変数変換や終結式に関連してある種の行列式の展開項を考察した。そこにはまだグラフ理論の考え方は見出せないが、展開項の特徴を述べた主張は行列と木の定理の原型とみなせる。後に Cayley は Borchardt の結果を木の数え上げの観点から解釈している。

注意：この行列式はゼロサム性をもつ行列の余因子であるが、行列にはグラフ理論的意味は全くない。

- Kirchhoff と Maxwell はともに 電気回路の方程式を Cramer の公式によって解き、分子と分母の行列式の展開項を回路のグラフのことばで説明した。特に、分母の展開公式は行列と木の定理（重みつき）に相当する。

ただし、Kirchhoff はラプラシアン行列とは別の行列を考えた。ラプラシアン行列は Maxwell の本に登場する。ときどきラプラシアン行列を Kirchhoff 行列と呼ぶ文章に出会うが、適切な呼び名とは思えない。

pp 10 - 11 「Kirchhoff 行列」, 「Kirchhoff の定理」 の例としての  
論文の例

pp 12 - 13 Borchard の 1860 年の論文から pp 119, 121 抜粋

pp 14 - 15 Cayley の 1889 年の論文から pp 893, 895 抜粋

p 16 Sylvester の 1857 年の論文から p 76 抜粋

pp 17 - 18 Kirchhoff の 1847 年の論文 (英訳) から pp 1967 - 1968 抜粋

pp 19 - 20 Maxwell の 1892 年の本から pp 404, 409 抜粋



## まとめ

Kirchhoff : ラプラスアン行列とは別の行列を用いて  
1847 回路方程式を定式化し, 解の組合せ論的  
記述を示した.

Maxwell : ラプラスアン行列を用いて 回路方程式を  
1873, 1892 定式化した. 死後に出版された第3版には  
その解の組合せ論的記述が付録として  
書き加えられている. 特に, 分母の公式は  
行列と木の定理 (重みつき) そのものである.

Sylvester : ある種の行列式の展開の項数が  
1857  $(n+1)^{n-1}$  であることを指摘した.

Borchardt : ある種の行列式について行列と木の定理  
1860 の原型を示した (証明は怪しい).

Cayley : Borchardt の論文の結果を木の数と見做す  
1889 として解釈した.