

グラスマン多様体の起源

高崎金久

グラスマン多様体 $\text{Gr}(m,n)$

2通りの見方

1) 与えられた n 次元線形空間の m 次元線形部分空間全体のなす集合

2) 与えられた $n-1$ 次元射影空間の $m-1$ 次元線形部分多様体全体のなす集合 (こちらが先行した)

疑問

いつ誰がグラスマン多様体という言葉を使い始めたのか？

なぜGrassmannの名前が入っているのか？

Grassmann自身はグラスマン多様体を考えたのか？

Grassmannの延長論

Ausdehnungslehre (1844, 1862)

- 一般次元線形空間論の始まり。ベクトル演算のみならず、外積や内積も導入。独逸の用語と記述形式（1844年版では哲学的内容）で、当時はほとんど受け入れられなかった。
- 1870年代に Hankel, Clebsch, Cliffordらが注目するようになった（いずれも間もなく死去）。

特に Clifford は Grassmann の外積代数と
Hamilton の四元数を融合する研究を行った。

→ 今日のクリフォード代数につながる

- Peano はこの著作をもとに論文を書いた：

Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre
di H. Grassmann (1886)

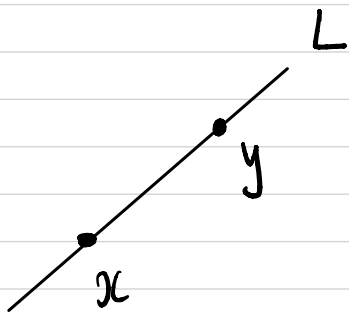
線形空間の今日的定義や集合論の記号 $\cup, \cap, \in$

→ その後 Peano の数理論理学的研究につながる

直線幾何学

S. Gindikin "Complex universe of Roger Penrose"
Mathematical Inteligencer 5, no. 1 (1983)

19世紀の直線幾何学の研究において, Plücker は
3次元射影空間の直線全体の集合を一つの幾何学的
対象としてとらえて, 座標 (Plücker 座標) を導入した.
Klein はこの集合を 5次元射影空間の 2次曲面とみなした.
→ 1970年代の Penrose の **ツイスタ-理論**



3次元射影空間の2点に同次座標

(これも Plücker が導入した) のよって

$$x = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$$

$$y = (y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$$

と表すとき, x と y を通る直線 L の

Plücker 座標, $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ ($1 \leq i < j \leq 4$)

2つ定まる (Cayley 1862, Plücker 1865~68). p_{ij} は

$$p_{12} p_{34} - p_{13} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0$$

という Plücker 関係式 をみたす. 2つのよって

直線全体の集合は5次元射影空間の2次曲面
とみなせる (Klein 1872).

→ のちに Severi のおって一般の $Gr(m, n)$ の拡張 (1915)

今日の視点では

$$\text{直線全体の集合} = Gr(2, 4)$$

しかし Cayley も Plücker も Penrose も Grassmann に
言及していない. (Gindikin の記事にも Grassmann と
グラスマン多様体への言及がない.)

Schubertの数え上げ幾何学

Math. Ann. 26 (1886)

Die n -dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen
Anzahlen unseres Raums.

Von

HERMANN SCHUBERT in Hamburg.

Um 'durch Anwendung des Principis von der Erhaltung der Anzahl
(Kalkül der abzähl. Geom., § 4) die Zahl der Strahlen zu finden,

- 射影空間内のさまざまな条件をみたす線形部分多様体の数え上げを論じた。独自の記号的計算法を導入。
その正当化が Hilbert の問題の 1 つにとり上げられている。

- ある条件をみたす線形部分多様体全体のなる集合に注目して、その次元を求めている。その中いるグラスマン多様体やシュバート多様体もある。

→ 後に (1930年代) Ehresmann や vander Waerden の研究につながった。それ以前にも イタリア学派の代数幾何学に影響を与えている。

しかし Schubert も Grassmann に言及していない。

Ehresmannの論文 (1934)

CHARLES EHRESMANN

Sur la topologie de certains espaces homogènes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1934

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1934__162__391_0>

Schubertのアイデアに基づいてグラスマン多様体の胞体分割を与えた。対称空間（グラスマン多様体はその典型例）に関するCartanの研究が背景にある。

II. Les variétés de Grassmann considérées comme des espaces homogènes symétriques

6. Le groupe de structure et le groupe d'isotropie. L'ensemble des variétés planes à k dimensions d'un espace projectif complexe à n dimensions définit une variété algébrique V appelée *variété de Grassmann*. En définissant chaque variété plane à k dimensions par l'ensemble de ses $\binom{n+1}{k+1}$ coordonnées plückeriennes homogènes $p_{i_0 i_1 \dots i_k}$, on obtient une représentation biunivoque de la variété V par une variété algébrique sans singularités de l'espace projectif à $\binom{n+1}{k+1} - 1$ dimensions. (Nous désignons par $\binom{a}{b}$ le nombre de combinaisons

(*) 「Grassmannの多様体と19年における代数多様体」

ただし Grassmannの著作は何も引用していない。

Severiの論文 (1915) *Annali di Math. Serie III, vol. 26*

Sulla varietà che rappresenta gli spazî subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare.

(Di FRANCESCO SEVERI, a Padova.)

グラスマン多様体という言葉を使い、
プリュッカー座標をグラスマン座標の名で
導入している、Ausdehnungslehreを引用している。

È ben noto che, seguendo H. GRASSMANN (*), si definiscono come coordinate (omogenee, sovrabbondanti) di uno spazio lineare S_k , entro un S_r , i determinanti d'ordine massimo, estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di $k+1$ punti (indipendenti) variabili in S_r , o i determinanti — proporzionali ai precedenti — d'ordine massimo, estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di $r-k$ iperpiani (indipendenti) passanti per quei punti (**). Fra queste coordinate passano alcune relazioni quadratiche omogenee, scritte da D'OVIDIO (**).

冒頭部分. フォリツッパ-座標の説明から始まる.

(*) Die Ausdehnungslehre von 1862 (Abs. I, Kap. III, N. 65) oppure: Ges. Werke, Bd. I, Th. II, p. 44. Per $r=3$, $k=1$ queste coordinate furono considerate diffusamente da PLÜCKER nella *Neue Geometrie des Raumes* (Leipzig, 1868-69). Di esse però egli aveva già fatto cenno, fin dal 1846, nella *Geometrie des Raumes*.

Interpretando le coordinate grassmanniane come coordinate omogenee di punto, in uno spazio S_ρ $\left[\rho = \binom{r+1}{k+1} - 1\right]$, gli S_k di S_r vengono rappresentati *biunivocamente, senza eccezioni*, dai punti di una varietà algebrica V_t , di dimensione $t = (k+1)(r-k)$, appartenente ad S_ρ , e della quale le sud-

グラスマン座標を S_ρ の点の同次座標とみなす

Il fatto che la V_t , che chiameremo « varietà grassmanniana di indici (r, k) », non contenga altre varietà algebriche a $t-1$ dimensioni, all'infuori delle sue intersezioni complete colle forme di S_ρ , dà luogo ad una conseguenza notevole.

これをグラスマン多様体と呼ぶ

プリュッカー座標 = グラスマン座標

コルモゴロフ編(小林昭七監訳) 19世紀の数学 II

「グラスマンの多次元幾何」より

改訂版の「延長論」(1862)でグラスマンは、 n 次元ベクトル空間とそのベクトルの「外積」を定義したが、これは今日では単に n ベクトルと呼ばれる。グラスマンは任意のベクトルの外積を、基ベクトル（彼は単位元と呼んだ）の外積の1次結合として表した。この1次結合の係数は、いまでは n 次元空間の m 次元平面の「グラスマン座標」と呼ばれる。この座標は n 次元空間の m 次元平面を調べる際の基本的な道具となる。したがって、そのような平面の集まりを「グラスマン多様体」と今日呼ぶのである。延長された量の加法、乗法がグラスマンを「符号の変わる数」の代数へと導いたのだが、これについてはすでに述べた。

Extension Theory (Ausdehnungslehre 1862)

History of Mathematics Source Series (AMS/LMS 収録要訳)

Volume: 19; 2000; 411 pp

第3章 § 2, 65 頁の末尾:

But according to definition (62), if $a, b, \dots$, taken in any order, are equal to $r, s, \dots$, then $(-1)^u \alpha_a \beta_b \dots$ is equal to the determinant $\sum \pm \alpha_r \beta_s \dots$, whence

$$\left[\sum \alpha_a a_a \cdot \sum \beta_b a_b \dots \right] = \sum \left\{ \sum \pm \alpha_r \beta_s \dots \right\} [a_r a_s \dots],$$

where $r < s < \dots$.

$$\sum_a \alpha_a a_a \wedge \sum_b \beta_b a_b \wedge \dots = \sum_{r < s < \dots} \begin{vmatrix} \alpha_r & \beta_r & \dots \\ \alpha_s & \beta_s & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} a_r \wedge a_s \wedge \dots$$

分解可能な外積形式と部分空間の対応関係

J. DIEUDONNÉ

The Tragedy of Grassmann

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1979, fascicule 2
« The Tragedy of Grassmann », , p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1979__2_A1_0>

文献情報も豊富

(Severiの論文も引用)

The Grassmannian $G_{n,p}(E)$ is the subset of the projective space $P(\overset{p}{\wedge} E)$ which is the image of the set of decomposable p -vectors $\neq 0$ in $\overset{p}{\wedge} E$, and is therefore in 1-1 correspondence with the set of all vector subspaces of dimension p in E . It is an algebraic submanifold of $P(\overset{p}{\wedge} E)$; to prove this, one has to write down the necessary and sufficient conditions which must be satisfied by the coordinates ζ_{ii} of a p -vector $z = \sum_{ii} \zeta_{ii} e_{ii}$ (summation over

decomposable p -vector

$$z_p = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \neq 0$$

$\leftrightarrow$

E の p 次元

線形部分空間

Ausdehnungslehre 1862年版の第3章2節70項に

このことと該当する主張がある. Deudonnéは

Grassmannがその後 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ の展開係数 S_H

(= ω^p)_{2, \dots, p} - 座標 = グラスマン座標) のみならず

代数的関係式を追求めたと書き記している.

70項の冒頭: *combinatorial product* = 外積

70. Two combinatorial products (A and B) that are not zero stand in a numerical relation to one another if and only if the domains derived from their elementary factors are identical; that is,

$$(a) \quad A \equiv B$$

if and only if the elementary factors of A yield the same domain as do those of B ;
or

$$(b) \quad [a_1 a_2 \cdots a_m] \equiv [b_1 b_2 \cdots b_m]$$

if and only if each of the magnitudes numerically derivable from $a_1, \dots, a_m$ can also be derived from $b_1, \dots, b_m$, and thus if one can always set

$$(c) \quad x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_m b_m$$

whatever values either $x_1, \dots, x_m$ or $y_1, \dots, y_m$ may have.

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \equiv b_1 \wedge \cdots \wedge b_m \iff \text{Span}\{a_1, \dots, a_m\} = \text{Span}\{b_1, \dots, b_m\}$$

まとめ

• いつ誰が「グラスマン多様体」という言葉を使い始めたか？

— 1915年のSeveriの論文まで遡ることができた。

イタリア学派がそれ以前から使っていたかもしれない。

• なぜGrassmannの名前が入っているのか？

— フォリェツカー座標（グラスマン座標とも呼ばれている）を

独立に、かつより一般的に導入したからだろう。

• Grassmann自身はグラスマン多様体を考えたか？

— ここまで行っていない。