交錯定理とその周辺

高崎金久

（2024年10月12日）

※ 後日Cauchyの論文を読み直したところ，証明の考え方は$n \geq 4$の場合にも通用することがわかった．またSturmはG, Kの両方を一般的な実対称行列としていた．これらに基づいて本文を一部修正した（2025年1月）．

要旨

n次実対称行列の固有値はすべて実数であるが，同じ番号の行と列を除去して得られるn-1次実対称行列の固有値は除去前の行列の固有値の間に1個ずつ存在する．この事実はCauchyとSturmによって1829年の論文において指摘されて以来，Courantによるミニマックス定理の観点からの見直しを経て，今日では「交錯定理」や「ポアンカレの分離定理」などの名称で知られている．この講演ではCauchyとSturmのそれぞれの論文の内容を紹介し，彼らの考察やその後の研究との関わりを探る．

交錯定理

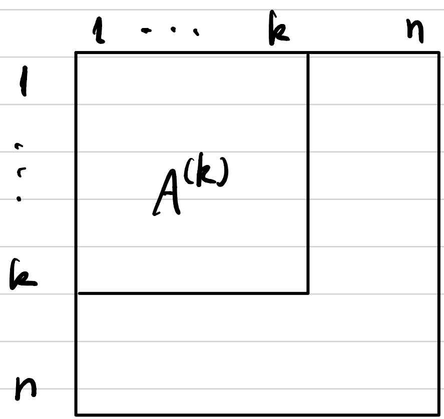
n 次実対称行列 A に対して k 行と k 列 (k は任意) を除去して得られる $n-1$ 次実対称行列を A' とする. A の固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, A' の固有値を $\lambda_1' \geq \cdots \geq \lambda_{n-1}'$ とする.

このとき次の交錯関係 (interlacing relation) が成り立つ:

$$\lambda_1 \geq \lambda_1' \geq \lambda_2 \geq \lambda_2' \geq \cdots \lambda_{n-1} \geq \lambda_{n-1}' \geq \lambda_n$$

表現論との関わり

〈系〉 A の左上の $k \times k$ 小行列 $A^{(k)}$ の固有値を $\lambda_1^{(k)} \geq \cdots \geq \lambda_k^{(k)}$ とするとき $\lambda_j^{(k)} \geq \lambda_j^{(k-1)} \geq \lambda_{j+1}^{(k)}$ $(1 \leq j \leq k-1)$ が成り立つ.



<例> $n=3$

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_1^{(3)} & \geq & \lambda_2^{(3)} & \geq & \lambda_3^{(3)} \\ & \rotatebox{-45}{$\geq$} & & \rotatebox{-45}{$\geq$} \\ & & \lambda_1^{(2)} \geq \lambda_2^{(2)} & & \\ & & \lambda_1^{(1)} & & \end{array}$$

ゲルファント-ツェトリンパターン

$\updownarrow$

ヤング図形上の半標準盤

$\{(\lambda_j^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \mid \lambda_j^{(k)} \geq \lambda_j^{(k-1)} \geq \lambda_{j+1}^{(k)}\}$ ゲルファント-ツェトリン錐体

ゲルファント-ツェトリン系（可積分力学系）

Guilemin-Sternberg, Kostant-Walach

交錯定理に関わるCauchyとSturmの論文

A. L. Cauchy, sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes, Exer. Math. 4 (1829), Oeuvres (2) 9, 174-195.

C. Sturm, Extrait d'un mémoire sur l'intégration d'un systèm d'équations différentielles linéaires, Bull. des sciences mathématiques 12 (1829), 313-322.

いずれも固有値の実数性と交錯関係を示している。

Cauchyの1829年の論文

〈その要点〉(今日の線形代数のことばに翻訳)

- 実対称行列の固有値はすべて実数である.
- 実対称行列 A とその主小行列 A' の固有値の間には交錯関係が成り立つ.
- 実対称行列を係数とする2次形式は変数の直交変換によって標準形 $\alpha_1\xi_1^2+\cdots+\alpha_n\xi_n^2$ に変換される.

2次形式から出発し, 変数の平方和の値が1に等しいという条件下での極値問題から固有値問題を引き出している.

〈条件付き極値問題〉

束縛条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ の下で 2次形式 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$
(a_{ij} は実数, $a_{ij} = a_{ji}$) の極値を求めること.
↑実際には停留値

Lagrange の未定乗数法によって, これは次のような
$x_1, \cdots, x_n$, s を見出すことに帰着する:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = s x_j, \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

$x_1, \cdots, x_n$ が固有ベクトルの成分, s が固有値に相当する.

＜行列式による $x_1, \cdots, x_n$ の消去＞

Cauchy は x_j に対する上の1次方程式を

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-s)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-s)x_n &= 0
\end{aligned}
$$

と書き直し，1815年の論文で論じた行列式論 (*) を援用して s に対する方程式

$$
S = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0
$$

を導いている。 (*) T. Hawkins 1974, 1975 の指摘

〈固有ベクトルの直交関係〉

方程式 $S=0$ の根の実数性の説明に先立って，Cauchy は $S=0$ の相異なる2根 s, s' に対する固有ベクトルの成分 $x_1, \cdots, x_n$, $x_1', \cdots, x_n'$ が直交関係

$$x_1 x_1' + x_2 x_2' + \cdots + x_n x_n' = 0$$

をみたすことを注意している．もちろん x_i, x_i' が実数に選べることがわかるまでは本当の意味での直交関係ではないが，これは直交変換の概念に至る重要な観点である．(cf. 剛体の慣性モーメントや主軸)

<Sの小行列式に注目する>

固有ベクトルの成分 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は S の小行列式(余因子)によって表すことができる。そのことから Cauchy は

$$R = \begin{vmatrix} a_{22}-s & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-s \end{vmatrix}$$

に注目する。さらに低次の小行列式

$$Q = \begin{vmatrix} a_{33}-s & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn}-s \end{vmatrix}, \quad \cdots$$

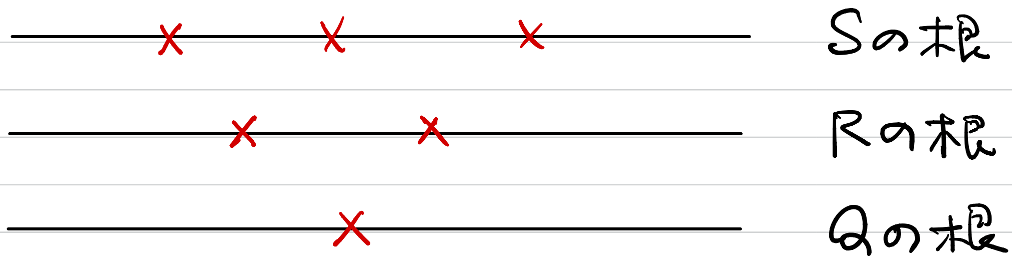
も併せて考える。

〈固有値の実数性と交錯関係〉

Cauchyは多項式列 $S, R, Q, \cdots, a_{nn}-s$ を用いて固有値の実数性と交錯性を説明している．

実数性の証明は $S=0$ に虚根があると仮定して，順次 $R=0, Q=0, \cdots$ に虚根があることを示し，最後の1次方程式 $a_{nn}-s=0$ に虚根があるという矛盾が生じる，という奇妙な論法を用いている．交錯関係は $n \leq 4$ の場合まで証明し，一般の n の場合も同様に示せると主張している．

〈$n=3$の場合の交錯関係〉



$$Q = a_{33} - s$$

$$R = (a_{22} - s)(a_{33} - s) - a_{12}^2$$

$$R = 0 \Rightarrow QS = -P_{12}^2 < 0$$

$$P_{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{13} & a_{33} - s \end{vmatrix}$$

符号と増減を調べて上のような結論を得ている

< Sturmの研究への言及 >

Sturmが同じ結果をきわめて簡明なやり方で得ていたとのコメントが論文の最後にある、

J'observerai, en terminant cet article, que, au moment où je n'en avais encore écrit qu'une partie, M. Sturm m'a dit être parvenu à démontrer fort simplement les théorèmes I et II. Il se propose de publier incessamment le Mémoire qu'il a composé à ce sujet, et qui a été offert à l'Académie des Sciences le même jour que le présent article.

論文の表題にもSturmからの影響が感じられる、

(本文には惑星運動への言及が皆無)

Sturmの1829年の論文

線形代数的に言えば，実対称行列 $G=(g_{ij})$, $K=(k_{ij})$ に対して 一般化固有値問題

$$(Gr+K)\mathbb{V}=\begin{pmatrix} g_{11}r+k_{11} & g_{12}r+k_{12} & \cdots & g_{1n}r+k_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1}r+k_{n1} & g_{n2}r+k_{n2} & \cdots & g_{nn}r+k_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を論じている（実際には $n=5$の場合のみ）．r が固有値である．

その背景は惑星運動の永年摂動に関する Lagrange と Laplace の研究である．そのモデルとなる常微分方程式の解の構成から上のような一般化固有値問題が現れる．

〈論文の要点〉 2次形式 $\sum_{i,j} g_{ij}v_{ij}$ が正定値であるとする。v_i に対する1次方程式から $v_1, v_2, \cdots$ を順次消去して $Qv_5=0$ という方程式を導くことにより、r に対する5次方程式 $Q=0$ を得る。その途中で一連の多項式 P, N, M, L が導入されるが、これらは結果として $Gr+K$ の左上の k 次小行列式である（Sturmは行列式を使わずにこれらの計算を行っている）：

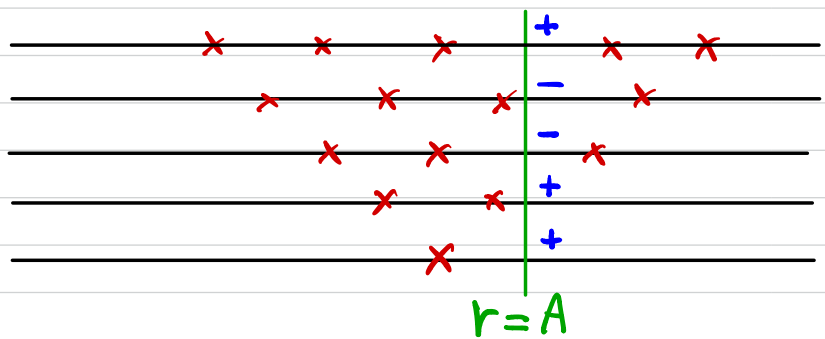
$$Q = \begin{vmatrix} g_{11}r+k_{11} & \cdots & g_{15}r+k_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{51}r+k_{51} & \cdots & g_{55}r+k_{55} \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} g_{22}r+k_{22} & \cdots & g_{25}r+k_{25} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{52}r+k_{52} & \cdots & g_{55}r+k_{55} \end{vmatrix},$$

$$\cdots, \quad L = g_{55}r+k_{55}$$

- L, M, N, P, Q の根はすべて実数であり，それぞれ直前の多項式の根を端点とする区間の中に1つずつ存在する（すなわち交錯関係が成り立つ）．

- 任意の値 A に対して，$r = A$ における Q, P, N, M, L, G（G は正定数）の値 $Q(A), P(A), N(A), M(A), L(A), G$ の符号変化の回数は区間 $r > A$ における Q の根の個数に等しい．

たとえば $Q(A)>0$, $P(A)<0$, $N(A)<0$, $M(A)>0$, $L(A)>0$, $G>0$ のとき，符号変化の回数は２回だから，$r>A$ において Q は２個の根をもつ．



第２の主張に関連する主張（区間 $A<r<B$ における根の個数，根の正値性など）がこのあとに続く．

〈根の個数に関するSturmの定理との類似性〉

上の第2の主張は多項式の根の個数に対して Sturmが見出した有名な定理（1829, 1835）と酷似している. 1829年の論文では 多項式 $f(x)$（重根をもたないとする）とその導函数 $f'(x)$ から ユークリッド互除法によってGCD f_m（0でない定数）に至る多項式列 $f_0=f$, $f_1=f'$, $\cdots$, f_m を構成し, それらの値の符号変化の回数と $f(x)$ の根の個数を関連づける. 1835年の論文では多項式列の構成を少し一般化している.　（cf. 高木貞治「代数学講義」）

<Sturmの「証明」は理解不能>

Ces théorèmes, dont je donne deux démonstrations différentes, fournissent pour la résolution de l'équation Q = 0 une méthode qui me semble plus simple que toute autre qu'on pourrait employer, en ce que le même calcul par lequel on forme l'équation Q = 0 donne le système de fonctions auxiliaires qui sert à la résoudre. Au surplus, cette équation ayant toutes ses racines réelles, pourrait être résolue par la seule application de la règle de Descartes.

These theorems, of which I give two different demonstrations, provide for the resolution of the equation Q = 0 a method which seems to me simpler than any other which could be used, in that the same calculation by which we form the equation Q = 0 gives the system of auxiliary functions which serves to resolve it. Moreover, this equation having all its real roots, could be resolved by the sole application of Descartes' rule.

Sturmはこのように「2つの証明」を紹介すると言って話を進めるが，このあとの「証明」はよく理解できない。

Sturmが本当に証明をもっていたかどうかはわからない。ただし，Q, P, N, M, L, G の根が交錯関係をみたしていれば，そこから符号変化の回数とQの根の個数に関する主張は従うように見える（すでに示した図参照）。

〈注意〉 Kが3重対角行列 $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 \\ 0 & 0 & k_{42} & k_{44} & k_{45} \\ 0 & 0 & 0 & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix}$ であればQ, P, N, M, L, Gは3項間漸化式をみたす。そこから1835年の論文の多項式列の条件が従う。

まとめと補足

交錯定理はCauchyとSturmの1829年の論文において示されているが，Sturmの論文の証明は理解不能である．Sturmの論文は多項式の根の個数を与える有名な定理と似た形の結果も併せて説明しているが，それらの論理的関係も論文から読みとれない．

交錯定理は後年Courantによってミニマックス定理として証明されたが，近年は線形代数的方法によっても証明されている（S.G.Hwang 2004，S.Fisk 2005）．

Wikipedia "Min-max theorem" より

(Poincaré's inequality) — Let M be a subspace of V with dimension k, then there exists unit vectors $x, y \in M$, such that

$\langle x, Ax\rangle \le \lambda_k$, and $\langle y, Ay\rangle \ge \xi_k$.

min-max theorem —

$$\lambda_k = \max_{\substack{\mathcal{M}\subset V \\ \dim(\mathcal{M})=k}} \min_{\substack{x\in\mathcal{M} \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle$$
$$= \min_{\substack{\mathcal{M}\subset V \\ \dim(\mathcal{M})=n-k+1}} \max_{\substack{x\in\mathcal{M} \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle.$$

交錯定理は直交多項式系の根の交錯関係とも関係がある. Sturmは常微分方程式論(Sturm-Liouville理論)においても解の零点を論じている.

交錯定理はグラフ理論にも応用されている. 実際, 無向グラフの隣接行列は実対称行列であり, 頂点の一部を除去することはその小行列を考えることに相当する.