

Liouville 平面から見た複素 WKB 法

京都大学総合人間学部 高崎金久 (Kenehisa Takasaki)

概要

An alternative approach to the exact WKB method is proposed. This approach is based on the so called “Liouville transformation” that converts the problem on the physical coordinate space to a scattering problem on another space.

1 はじめに

WKB 法 (三人の物理学者 Wentzel, Kramers, Brillouin の名前の頭文字を並べたものだが, 独立に研究した Jeffreys の名前を加えて「JWKB 法」と呼ばれることもある) は 1 次元の定常 Schrödinger 方程式

$$-\hbar^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (1)$$

を近似的に解くために開発された手法の一つである. 以下では $\lambda = 1/\hbar$, $f(x) = 2V(x) - 2E$ と置いて書き直した形の方程式

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \lambda^2 f(x)\psi \quad (2)$$

を考える (この方が扱いやすく, かつ多少一般的である). さらに $f(x)$ は多項式などの複素解析関数であるとする. その場合には微分方程式を複素領域で扱うことができる. 複素領域で展開される WKB 法を「複素 WKB 法」という.

WKB 法の出発点は $\hbar \rightarrow 0$ の極限 (準古典極限) における近似解

$$\psi \sim f(x)^{-1/4} \exp\left(\pm \lambda \int_{x_0}^x f(\xi)^{1/2} d\xi\right) \quad (3)$$

である. この漸近的表示 (19 世紀前半に Liouville と Green が見出したもので, その意味は追々明らかになる) は $f(x)$ の零点 (「転回点」と呼ばれる) で破綻すると考えられるが¹, 転回点を越えたところにも前述の漸近形をもつ解が \pm の符号に応じて二種類あるので, もとの解はそれらの 1 次結合に対応するはずである. WKB 法の第二の要点はこの対

¹この問題に対応する 1 自由度の古典力学系では, 質点の運動は $f(x) \leq 0$ の範囲に限られている. $f(x)$ の零点では, 質点がポテンシャルの壁にぶつかって一瞬停止し, 向きを変えてもと来た道を戻ることになる. 「転回点」(turning point) という名称はこの物理的描像に由来する. 量子力学的にも, 転回点は波動関数の性質が変わる点である. すなわち, 古典運動が可能な区間 ($f(x) \leq 0$) では波動関数は複素数値で振動し, 転回点を越えるところ ($f(x) > 0$) で振動をやめて指数的減少に転じる. その意味で, 確率的には非常に小さいが, 古典力学的運動の禁止された領域にも質点の浸み出しが起こる.

応関係を決めること，すなわち，転回点の一方の側での二種類の解 ψ_1, ψ_2 と反対側での二種類の解 ψ_3, ψ_4 の間の 1 次関係（接続公式）

$$\psi_1 = A\psi_3 + B\psi_4, \quad \psi_2 = C\psi_3 + D\psi_4 \quad (4)$$

を求めることにある（Jeffrey と Wenzel らが取り組んだのはこの問題である）．この種の接続公式を厳密な形で求めることは一般的には難しく，物理学者は必要に迫られているような近似的公式を編み出した．これらの公式は全般に数学的根拠が曖昧で，中には公式としての論理的整合性に欠けたものもあり，それが論争の種にもなった．WKB 法はこのように多くの疑問を抱えていたので，その数学的裏付けを与える研究が 1960 年代から 70 年代にかけて M. Fedoryuk [4], N. & P. Fröman [5], F. Olver [10] らによって推進された．

WKB 法の研究は物理学者 A. Voros の 1980 年代前半の研究 [12] をきっかけとして新たな局面を迎えた．WKB 法は伝統的に近似解法とみなされて来たが，Voros は WKB 法を Borel 総和に基づく完全（exact）な解法として定式化し直すというアイデアを示したのである．それは漸近解析の新しい試みとして当時関心を集めていた J. Ecalle の再生函数（resurgent function）の理論 [3] とも通じるものだった．Voros のアイデアは F. Pham と河合隆裕のそれぞれが率いるグループによって代数解析の言葉に翻訳され [1, 2]，その視点からの研究が今日まで続いている [8] ．

「完全 WKB 法」へのアプローチは代数解析の方法以外にもいくつか提案されている．以下では 1990 年前後の筆者の試み [11] を紹介する．これは 1970 年代の古典的研究 [4, 5, 10] ならびに 1980 年代後半の C. Gérard と A. Grigis の仕事 [7] をヒントにしたものである．なお，最近になって，物理学者 S. Giller が同じ頃に同様の方法を提案していた [6] ということを知った．

2 Liouville 変換

Olver の本 [10] に従って独立変数と従属変数の変換（Liouville 変換）

$$z = \int_{x_0}^x f(\xi)^{1/2} d\xi, \quad \psi(x) = f(x)^{-1/4} \phi(z) \quad (5)$$

を行うと， $\psi(x)$ に対する方程式 (2) は

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = (\lambda^2 + u(z)) \phi \quad (6)$$

に変わる．ここで $u(z)$ は

$$u(z) = -f(x)^{-3/4} \frac{d^2}{dx^2} (f(x)^{-1/4}) = \frac{1}{4} \frac{f_{xx}(x)}{f(x)} - \frac{5}{16} \frac{f_x(x)^2}{f(x)^3} \quad (7)$$

で与えられる．この微分方程式は定数係数の微分方程式 $d^2 \phi / dz^2 = \lambda^2 \phi$ をポテンシャル $u(z)$ で「摂動」したものであるから，後者（「無摂動系」）の解 $\phi = e^{\pm \lambda z}$ を第 0 近似とする形で「摂動系」(6) の解が得られることが期待される．それがまさに WKB 法における近似解（Olver の言葉では「Liouville-Green 近似」）に他ならない．

$f(x)$ が複素解析関数ならば, $u(z)$ も z 平面 (これが標題にある「Liouville 平面」である) 上の複素解析関数となる. ただし, 変数変換の定義式に $f(x)$ の平方根が含まれているので, z は x の関数として多価関数になる. その分岐点は $f(x)$ の零点すなわち転回点に現れる. このため $u(z)$ も多価関数になる. この多価性を避けるため, 実際の計算では平面に適当に「カット」を入れて考える. これらのカットは接続問題を考える際に重要な役割を果たす.

このように, x 平面と z 平面の間の対応は一般に複雑なものになる. その定性的な特徴を見る上でも重要な目印となるのが「Stokes 曲線」と「反 Stokes 曲線」である²:

1. Stokes 曲線: 転回点を出発し, $\text{Im}(\lambda z)$ が一定の値をとる. z 平面では実軸に平行.
2. 反 Stokes 曲線: 転回点を出発し, $\text{Re}(\lambda z)$ が一定の値をとる. z 平面では虚軸に平行.

例として, $f(x)$ が 4 実根をもつ 4 次多項式

$$f(x) = (x - b')(x - a')(x - b)(x - a) \quad (8)$$

(a', b', a, b は $b' < a' < b < a$ という順序で並ぶ実数) の場合の Stokes 曲線の概形を図 1 に示す.

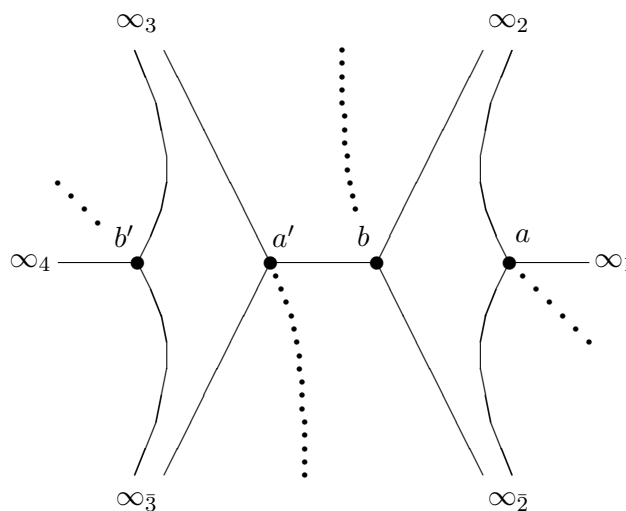


図 1: (8) の場合の Stokes 曲線の概形 ($\arg \lambda = 0$, 点線はカット)

3 Liouville 平面上の方程式の特徴

以下, 説明を簡単にするため $\arg \lambda = 0$ とする. $\arg \lambda = 0$ から出発して偏角を変えていけば Stokes・反 Stokes 曲線も変形するが, その場合の議論も以下と同様である.

²文献によっては Stokes 曲線と反 Stokes 曲線の定義が逆になっている. ここでは Olver の本 [10] に従う.

さらに，以下では議論を $f(x)$ が多項式の場合に限定しよう³．このとき

$$u(z) = O(|z|^{-2}) \quad (|z| \rightarrow \infty) \quad (9)$$

となることがわかる．これは方程式 (6) が一種の「ポテンシャル散乱問題」として扱えることを意味する．通常の散乱問題ではポテンシャルが遠方で急減少することを仮定することが多いが，逆 2 乗程度の減少度でもそれに準じた議論ができる．たとえば， z 平面の虚軸に平行で $u(z)$ の特異点にぶつからない直線に沿って $\phi \sim e^{\pm\lambda z}$ というように振舞う解が構成できる．これは散乱理論で基本的な役割を果たす「Jost 解」に相当する．

そのような振動的な解に基づいて複素 WKB 法を展開することも可能だが，ここではむしろ実軸に平行な方向の解の振る舞いに注目する． $e^{\pm\lambda z}$ は実軸に平行な半直線に沿って指数的に減少あるいは増大するから，その方向で指数的に減少する (6) の解は定数倍を除いて一意的に定まる．それを x 平面に戻せば，無限遠方に伸びる Stokes 曲線の無限遠点には，その方向で指数的に減少する解が定数倍を除いてただ一つ決まることになる．我々の複素 WKB 法へのアプローチではこれらの解が基本的な役割を果たす．

4 Stokes 曲線の無限遠点に付随する解

設定を明確にするため，Stokes 曲線の端点として現れる無限遠点に $\infty_1, \infty_2, \dots$ というように番号を付けておく．二種類の指数函数 $e^{\pm\lambda z}$ のうち無限遠点 ∞_j に近づくとき減少する方を $e^{\sigma_j \lambda z}$ と表わす (σ_j は ± 1 のいずれかである)．このとき，この後すぐに説明するように， ∞_j の近傍で定義された (2) の解 ψ_j で

$$\psi_j = a_j(z, \lambda) f(x)^{-1/4} e^{\sigma_j \lambda z}, \quad a_j(z, \lambda) \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty_j) \quad (10)$$

という形をもつものがただ一つ定まる．これは冒頭に述べた近似解を「振幅函数」 a_j で補正して真の解にしたものに他ならない．構成の都合上，振幅函数を z の函数とみなす方が都合がよいので， $a_j(z, \lambda)$ と書いている．Liouville 変換した方程式 (6) ではこれは

$$\phi_j = a_j(z, \lambda) e^{\sigma_j \lambda z} \quad (11)$$

という解に相当する．

このような解を作るには $a_j(z, \lambda)$ に対する微分方程式

$$\left(\frac{d}{dz} + 2\sigma_j \right) \frac{da_j(z, \lambda)}{dz} = u(z) a_j(z, \lambda)$$

を積分方程式

$$a_j(z, \lambda) = 1 + \sigma_j \int_{z(\lambda_j)}^z dz_1 \frac{1 - e^{2\sigma_j(z_1 - z)}}{2\lambda} u(z_1) a_j(z_1, \lambda)$$

に書き直して逐次代入法で解けばよい．結果として函数項級数表示

$$a_j(z, \lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_j^{(n)}(z, \lambda) \quad (12)$$

³ $f(x)$ が有理式の場合には (たとえば小池の仕事 [9] を参照)， $u(z)$ の無限遠での漸近形が少し変わる．それを踏まえて以下の議論を修正することはおそらく可能だろうが，ここでは立ち入らない．

が得られる．ここで第 n 項は， $\sigma_j = 1$ の場合には

$$a_j^{(n)}(z, \lambda) = \int_{z(\infty_j)}^z dz_n \int_{z(\infty_j)}^{z_n} dz_{n-1} \cdots \int_{z(\infty_j)}^{z_2} dz_1 \\ \times \frac{(1 - e^{2\lambda(z_1 - z_2)}) \cdots (1 - e^{2\lambda(z_{n-1} - z_n)})}{(2\lambda)^n} u(z_1) \cdots u(z_n) \quad (13)$$

という多重積分で，また $\sigma_j = -1$ の場合には

$$a_j^{(n)}(z, \lambda) = \int_z^{z(\infty_j)} dz_1 \int_{z_1}^{z(\infty_j)} dz_2 \cdots \int_{z_{n-1}}^{z(\infty_j)} dz_n \\ \times \frac{(1 - e^{2\lambda(z - z_1)}) \cdots (1 - e^{2\lambda(z_{n-1} - z_n)})}{(2\lambda)^n} u(z_1) \cdots u(z_n) \quad (14)$$

という多重積分で定義される．

ただし，多重積分の積分変数 z_1, \dots, z_n は x 平面上の次の条件を満たす曲線 $C_j(x)$ の z 平面における像の上を走るものとする：

1. $C_j(x)$ は ∞_j から出発して転回点を避けながら x に至る単純曲線である．
2. $C_j(x)$ に沿って $e^{\lambda z}$ は単調増加である．

後者の条件を満たす道を一般に「前進的な道」という．転回点は $u(z)$ の特異点であるから，それを避けるのは言うまでもない．他方，前進性の下では上の多重積分の積分変数について $\operatorname{Re}(\lambda z_{j-1}) \leq \operatorname{Re}(\lambda z_j)$ という不等式が成立するので，被積分函数の中の指数函数を含む因子が

$$\left| 1 - e^{2\lambda(z_{j-1} - z_j)} \right| \leq 1 + \left| e^{2\lambda(z_{j-1} - z_j)} \right| \leq 2$$

というように抑えられる．したがって，函数項級数の各項が

$$V_j(x) = \int_{z(\infty_j)}^z |dz| |u(z)| \quad (15)$$

という評価函数を用いて

$$\left| a_j^{(n)}(z, \lambda) \right| \leq \frac{V_j(x)^n}{n! |\lambda|^n} \quad (16)$$

というように評価できて，函数項級数が絶対収束することがわかる．特に， $a_j(z, \lambda)$ は $x \rightarrow \infty$ と $\lambda \rightarrow \infty$ のいずれの意味でも

$$a_j(z, \lambda) \sim 1 + O(\lambda^{-1}) \quad (17)$$

という漸近形をもつ（いわゆる「double asymptotics」である）．

無限遠点から前進的道で到達できる点の範囲は Stokes・反 Stokes 曲線の配置から読み取ることができる．それは一般的にかなり広い領域であり，それをたどって別の無限遠点 ∞_k にまで到達できることも多い．このことが我々の複素 WKB 法の解釈の鍵となる．

5 二つの無限遠点が前進的道で結ばれるとき

二つの無限遠点 ∞_j, ∞_k が前進的道 C_{jk} で結ばれている状況を考える．このとき前述のようにして (2) の二つの解 $\phi_j(x, \lambda), \phi_k(x, \lambda)$ が構成できるが，前述の函数項級数を調べれば $a_j(z, \lambda)$ と $a_k(z, \lambda)$ は C_{jk} の反対側の端で同じ値に収束する

$$\lim_{x \rightarrow \infty_k} a_j(z, \lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty_j} a_k(z, \lambda) = a_{jk}(\lambda) \quad (18)$$

ということがわかる． $a_{jk}(\lambda)$ はポテンシャル散乱理論で「透過係数」と呼ばれるものに相当する量で，

$$a_{jk}(\lambda) = 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_{C_{jk}} a_j(z, \lambda) u(z) dz = 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_{C_{jk}} a_k(z, \lambda) u(z) dz \quad (19)$$

というように積分表示することもできる． $a_j(z, \lambda), a_k(z, \lambda)$ の函数項展開を代入すれば， $a_{jk}(\lambda)$ に対する級数展開が得られる．展開の最初の方は

$$a_{jk}(\lambda) = 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_{z(\infty_j)}^{z(\infty_k)} u(z) dz + O(\lambda^{-2}) \quad (20)$$

という形をしているので， $\lambda \rightarrow \infty$ (準古典極限) で $a_{jk}(\lambda) \rightarrow 1$ となることがわかる．さらに，Cauchy の積分定理によって， $a_{jk}(\lambda)$ は C_{jk} の前進性を保つ連続変形 (もちろん転回点を横切らないとする) の下で不変である．特に，この変形で C_{jk} を無限遠方に掃き出すことができれば， $a_{jk}(\lambda) = 1$ となる．

$a_{jk}(\lambda)$ のもう一つの特徴付けは Wronski 行列式

$$W[\psi_j, \psi_k] = \psi_j \frac{d\psi_k}{dx} - \frac{d\psi_j}{dx} \psi_k$$

によって与えられる． C_{jk} がカット (Liouville 変換を定義する際に x 平面上に入れた) を越えないとしよう．このとき Wronski 行列式 $W[\psi_j, \psi_k]$ は $a_{jk}(\lambda)$ を用いて

$$W[\psi_j, \psi_k] = 2\sigma_k \lambda a_{jk}(\lambda) \quad (21)$$

と表わせる．実際，(2) は 1 階の項をもたないので，Wronski 行列式は x に依らないが，Wronski 行列式の定義式を z で書き直してから z を $z(\infty_j)$ あるいは $z(\infty_k)$ に近づければ上の等式が得られる (今は σ_j と σ_k が逆符号である，ということにも注意せよ)．なお， C_{jk} がカットを越えるときにはこの等式は修正を要するが，それについては次節で説明する．

このことから接続問題との関係も明らかになる．実際，三つの無限遠点に付随する解の組 $\psi_j, \psi_k, \psi_\ell$ が与えられれば，その間には常に 1 次関係式

$$\psi_j = A\psi_k + B\psi_\ell$$

が成立するが，Wronski 行列式が x に依らないことから，この 1 次関係式は Wronski 行列式を用いて

$$\psi_j = \frac{W[\psi_j, \psi_\ell]\psi_k - W[\psi_j, \psi_k]\psi_\ell}{W[\psi_k, \psi_\ell]} \quad (22)$$

という形に表わせる（1次関係式の両辺と ψ_k, ψ_ℓ との Wronski 行列式を考えてみよ）。したがって，ここに含まれる Wronski 行列式がすべてわかれば接続問題は解けたことになるのである．特に，三つの無限遠点 $\infty_j, \infty_k, \infty_\ell$ が前進的道で互いに結ばれていれば，上で注意したことによって，これらの Wronski 行列式は素性のわかった量 $a_{jk}, a_{j\ell}, a_{k\ell}$ で表わせることになる（実際にはカットを越える議論が必要になるが，それに伴う修正は単純なもので，新たに未知の量が登場することはない）．

6 カットを越えるとき

前進的道 C_{jk} がカットを越える場合について説明する．カットの越え方には時計回りと反時計回りの二通りがある（図2）．

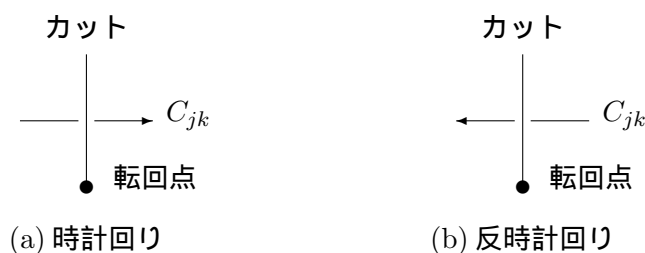


図 2: C_{jk} がカットを越えるとき

時計回りにカットを越える場合には ψ_j の表示における多価の因子 $f^{-1/4}e^{\sigma_j\lambda z}$ を解析接続したものをカットの向こう側の分枝で表示し直さなければならない．カットの端点（すなわち転回点）を $x = c$ とすると，これは

$$f(x)^{-1/4}e^{\sigma_j\lambda z(x)} \rightarrow -ie^{2\sigma_j\lambda z(c)}f(x)^{-1/4}e^{-\sigma_j\lambda z(x)} \quad (23)$$

という見かけ上の変化を生じる．結果として ψ_j の表示は

$$\psi_j \rightarrow -ie^{2\sigma_j\lambda z(c)}a_j(z, \lambda)f(x)^{-1/4}e^{-\sigma_j\lambda z(x)} \quad (24)$$

というように変わる．振幅函数 $a_{jk}(z, \lambda)$ については解析接続したものをもとと同じ記号で表わしている．この ψ_j と ψ_k との Wronski 行列式は

$$W[\psi_j, \psi_k] = -2\lambda\sigma_k i e^{2\sigma_j\lambda z(c)}a_{jk}(\lambda) \quad (25)$$

となる（今は σ_j と σ_k が同符号である，ということにも注意せよ）．カットを越えない場合に比べて， $a_{jk}(\lambda)$ の前に余分な因子が掛かることに注意されたい．

反時計回りにカットを越えるときも同様で，Wronski 行列式は

$$W[\psi_j, \psi_k] = 2\lambda\sigma_k i e^{2\sigma_j\lambda z(c)}a_{jk}(\lambda) \quad (26)$$

と表わせる．時計回りの場合との違いは $\pm i$ の符号だけである．この因子は $e^{\pm\pi/4}$ と表わせるが，このとき $\pi/4$ に掛かっている ± 1 は「Maslov 指数」と解釈することができる．

7 計算例：4 次のポテンシャルの場合

以上のことから，転回点がいずれも「単純」（すなわち $f(x)$ の根が単純根のみ）の場合には，互いに前進的道で結ばれる三つ組の1次関係を組み合わせることによって接続問題を解くことができる，ということがわかる．

例として前述の4次の多項式(8)を考えてみよう．Stokes 曲線の様子は図1のようにになっている．Stokes 曲線を図1のようにラベル付けし，点線で示したところにカットを入れる．さらに，等角写像 $x \mapsto z$ の分枝を $\text{Re } z(\infty_1) = +\infty$ というように選ぶ．対応して6個の解 $\psi_1, \psi_2, \psi_{\bar{2}}, \psi_3, \psi_{\bar{3}}, \psi_4$ が決まる．このうち $\{\psi_1, \psi_2, \psi_{\bar{2}}\}$ と $\{\psi_4, \psi_3, \psi_{\bar{3}}\}$ はそれぞれ前述の意味の三つ組であり，Wronski 行列式によって1次関係を書き下すことができる． $\psi_1, \psi_2, \psi_{\bar{2}}$ の間の1次関係は

$$\psi_1 = \frac{-ie^{-2\lambda z(a)}\psi_2 + \psi_{\bar{2}}}{a_{2\bar{2}}(\lambda)} \quad (27)$$

また $\psi_4, \psi_3, \psi_{\bar{3}}$ の間の1次関係は

$$\psi_4 = \frac{\psi_3 - ie^{2\lambda z(b')}\psi_{\bar{3}}}{a_{3\bar{3}}(\lambda)} \quad (28)$$

となる．ただしここで $a_{12}(\lambda) = a_{1\bar{2}}(\lambda) = a_{43}(\lambda) = a_{4\bar{3}}(\lambda) = 1$ となること（前述の積分路の連続変形の論法による）に注意して自明な因子は省いた．四つ組 $\{\psi_2, \psi_{\bar{2}}, \psi_3, \psi_{\bar{3}}\}$ はその任意の3個が前述の意味の三つ組であり，同様の接続公式が得られる（具体的な形はここでは省略する）．

これらの1次関係を組み合わせて，前進的道で直接結ばれない無限遠点に付随する解の間の Wronski 行列式を求めることができる．ここでは特に重要な ψ_1, ψ_4 の Wronski 行列式 $W[\psi_1, \psi_4]$ を考えてみよう（この Wronski 行列式が消えるのは ψ_1, ψ_4 が1次従属となって元の Schrödinger 方程式の固有函数を与える場合である）．途中の計算を省いて結果のみ示せば，求める Wronski 行列式は

$$W[\psi_1, \psi_4] = \frac{2\lambda}{a_{2\bar{2}}(\lambda)a_{3\bar{3}}(\lambda)} \times \left(e^{2\lambda(z(b)-z(a))} + e^{2\lambda(z(b')-z(a'))} + a_{2\bar{3}}(\lambda) + e^{2\lambda(z(b)-z(a)+z(b')-z(a'))} a_{2\bar{3}}(\lambda) \right) \quad (29)$$

となる．この結果から次のようなことが読みとれる．

1. 右辺の指数函数に現れているのはいずれも二つの転回点の間を結ぶ道に関する $f^{1/2}$ の定積分である：

$$z(b) - z(a) = \int_a^b f(x)^{1/2} dx, \quad z(b') - z(a') = \int_{a'}^{b'} f(x)^{1/2} dx. \quad (30)$$

これは道の周りを一周する周回積分に書き直せるが，それは $y^2 = f(x)$ という楕円曲線の周期積分である．

2. 準古典極限 ($\lambda \rightarrow \infty$) では $a_{jk} \rightarrow 1$ となるから， a_{jk} を1で置き換えて Wronski 行列式の準古典近似が得られる．それは

$$W[\psi_1, \psi_4] \sim 2\lambda \left(1 + e^{2\lambda(z(b)-z(a))} \right) \left(1 + e^{2\lambda(z(b')-z(a'))} \right) \quad (31)$$

というように因数分解された形をしている．

この結果を物理的で知られている近似法と比較してみよう．今考えているのは $V(x) - E$ が二つの区間で負の値をとるいわゆる「二重井戸 (double well)」型の系である．古典論においては，これは $[b', a']$ と $[b, a]$ の各区間 (井戸) の中を往復運動する質点を記述する．量子論においても，準古典極限では各井戸を独立に扱ってよく，そのときの固有値 (すなわちエネルギー) の近似値は「Bohr-Sommerfeld 条件」によって決めることができる．区間 $[b, a]$ に対する Bohr-Sommerfeld 条件は

$$2\lambda(z(b) - z(a)) = 2\pi i(n + 1/2) \quad (n \in \mathbf{Z}) \quad (32)$$

となる (左辺の積分は区間 $[b, a]$ の間の往復運動の作用積分を i 倍したものであることに注意)．この条件は $1 + e^{2\lambda(z(b)-z(a))} = 0$ という方程式の形に書き直せる．区間 $[b', a']$ に対する Bohr-Sommerfeld 条件も同様である．したがって，両者を組み合わせた準古典近似の固有値方程式として

$$\left(1 + e^{2\lambda(z(b)-z(a))}\right) \left(1 + e^{2\lambda(z(b')-z(a'))}\right) = 0 \quad (33)$$

が得られる．これは確かに真の固有値方程式 $W[\psi_1, \psi_4] = 0$ の準古典近似と一致している．

7.1 Borel 面上の解析との関係

最後に Borel 平面上の解析との関係について簡単に触れておく．

$a_j(z, \lambda)$ はすでに示したような函数項展開をもつが，各項に対して新たに積分変数を導入して書き直せば，Borel 総和との関係が見える形に変えることができる． $\sigma_j = 1$ の場合に説明しよう ($\sigma_j = -1$ の場合も同様である)．

函数項展開の第 n 項に対して新たに積分変数 ζ_1, \dots, ζ_n を導入し，積分の中の指数函数を含む部分を

$$\frac{1 - e^{2\lambda(z_{j-1}-z_j)}}{2\lambda} = \int_{z_{j-1}}^{z_j} e^{2\lambda(\zeta_{j-1}-z_j)} d\zeta_{j-1} \quad (34)$$

というように書き直す．これによって第 n 項は $2n$ 重の積分になるが，被積分函数はもとよりも簡単な $e^{2\lambda(\zeta_1-z_2)+\dots+2\lambda(\zeta_n-z)} u(z_1) \cdots u(z_n)$ という形に変わる．特に z 平面上の積分路を直線を選ぶことができる場合には， $s = (z_2 - \zeta_1) + \dots + (z - \zeta_n)$ と置いて， $s =$ 一定の超平面上の $2n - 1$ 重積分を先に実行すれば s についての Laplace 積分表示

$$a_j^{(n)}(z, \lambda) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} e^{-2\lambda s} A_j^{(n)}(z, s) ds \quad (35)$$

が得られる (θ は z 平面上の積分路の偏角である)．

よく知られているように，このような Laplace 積分は発散級数の Borel 総和の逆変換において現れるもので， s 平面が「Borel 平面」に他ならない．Voros の方法は Borel 総和から出発して完全 WKB 法を展開するものだが，上のようにしてそれを逆向きにたどることもできるのである．

参考文献

- [1] 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析, 数学 **45** (1993), 299–315.
- [2] E. Delabaere, H. Dillinger, and F. Pham, Développements semi-classiques exacts des niveau d'énergie d'un oscillateur à une dimension, C. R. Acad. Sci. Série I, **310** (1990), 141–146; Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 163–199.
- [3] J. Ecalle, Cinq applications des fonctions résurgentes, Pré-pub. Math. Univ. de Paris-Sud 84T62 (1984); Weighted products and parametric resurgence, in *Analyse Algébrique des Perturbations Singulière I: Méthodes Résurgentes* (Hermann, Paris, 1994), pp. 7–49.
- [4] M.A. Evgrafov and M.V. Fedoryuk, Asymptotic behavior as $\lambda \rightarrow \infty$ of the solution of the equation $w''(z) - p(z, \lambda)w(z) = 0$ in the complex z -plane, Russian Math. Surv. **21:1** (1966), 1–48.
- [5] N. Fröman and P. Fröman, JWKB approximation: Contribution to theory (North-Holland, 1965).
- [6] S. Giller, Balian-Bloch representation, semiclassical expansions and Borel summability in one-dimensional quantum mechanics, Acta Phys. Polonica **B23** (1992), 457–511; Borel summable solutions to one-dimensional Schrödinger equation, J. Math. Phys. **42** (2001), 608–640.
- [7] C. Gérard and A. Grigis, Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier, J. Diff. Eqs. **72** (1988), 149–177.
- [8] C.J. Howls, T. Kawai and Y. Takei (eds.), Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear (Kyoto University Press, Kyoto, 2000).
- [9] K. Koike, On a regular singular point in the exact WKB analysis, in [8], pp. 39–53; Asymptotics of the spectrum of Heun's equation and the exact WKB analysis, in [8], pp. 55–70.
- [10] F.W.J. Olver, Asymptotics and special functions (Academic Press, 1974).
- [11] K. Takasaki, Analytic expression of Voros coefficients and its application to WKB connection problem, in: M. Kashiwara and T. Miwa (eds.), *Special functions*, ICM-90 Satellite Conference Proceedings (Springer-Verlag, Berlin-New York-Tokyo, 1991), pp. 294–315 この論文には符号の誤りなど多数のミスがある . それらを訂正したものが次の URL に置いてある . URL <http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/res/voros.tex>.
- [12] A. Voros, The return of the quartic oscillator: The complex WKB method, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A, **39** (1983), 211–338.