Hyperbolic なルート系に付随する離散力学系

竹縄 知之　　東京大学大学院数理科学研究科

Grammaticos,Ramani,Papageorgiou[1] は特異点閉じ込め法という離散発展方程式に対する可積分性の判定法—Painlevé 性の類似物—を提唱した。ただし今のところ、この方法にはっきりとした数学的な根拠がある訳ではない。それに対して Hietarinta と Viallet[2] はこの判定法を満たすが、カオス的な振舞をする

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ & \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ -x_n + y_n + a/y_n^2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

という離散力学系を発見した。ここで $a \in \mathbb{C}$ は 0 とは異なる定数である。φ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ からそれ自身への双有理射であることに注意する。

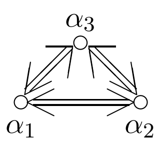
φ の不確定点を解消することにより次の定理が得られる。

THEOREM 1 φ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を 14 回ブローアップすることで得られる有理曲面 X *(Figure.1)* の自己同型射に持ち上げられる。

次に X 上の Picard 群の自己同型で
a) 標準因子 K_X を変えない。
b) 任意の 2 つの因子の交点数を変えない。
c) 有効因子を有効因子に写す。
というものを考える。$-K_X$ を実現する因子がただ一つなので、条件 c) より
D_i たちを、$-K_X$ を実現する因子を既約分解したときに現れる素因子とすると、c')D_i たちを (集合として) 動かさない。
という条件が導かれる。次の定理を得た。

THEOREM 2 X 上の *Picard* 群の同型で *a),b),c)* を満たすものは

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$



という *Cartan* 行列で表される *hyperbolic* な *Weyl* 群をその *Dynkin* 図の自己同型群で拡大した群を成し、φ はその元の一つである。

COROLLARY 3 X 上の *Picard* 群の同型で *a),b),c)* を満たすもののうち φ と可換なものは φ^m のみである。

逆に対称性から、有理変換を回復することを考える。ブローダウンの順序を交換することにより、拡大された Weyl 群の生成元を実現する有理変換が求まる。φ はその合成で回復される。

さらに離散 Painlevé 方程式の場合と同様に非自励的な (パラメーターの変換を含む) 力学系も考えるために、次のような定義をする。

Def 任意の整数 i に対して、有理曲面 X_i とその間の同型写像 $\varphi_i : X_i \to X_{i+1}$ が存在するとき、有理曲面の列 $\{X_i\}$ を同型写像の列 $\{\varphi_i\}$ の初期値空間 (連続の場合の対応物は岡本 [3] による) であるという。

この意味で上の逆問題を解くと次の様な力学系が得られる、

$$\begin{aligned} w_2 \circ \sigma_{13} \circ \sigma_{12} \quad & : (x, y; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \\ \mapsto \quad & (y, -x + y + a_5 + \frac{a_1}{y^2} + \frac{a_2}{a_1 y}\ ; \\ & a_6, -a_7 + 2a_5^2 a_6 + \frac{2a_2 a_6}{a_1}, a_1, a_2, -a_5, a_3, a_4 + 2a_3 a_5^2 - \frac{2a_2 a_3}{a_1}). \end{aligned}$$

この式は $a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$ かつ $a_1 = a_3 = a_6 = a$ のとき (1) と一致する。

同様に別の (適切な) 対称性から出発することにより、同様の性質を持つ力学系を構成できる。例えば

$$(x_{n+1}, y_{n+1}; a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) \quad = \quad (-y_n, x_n - y_n - s + \frac{a_n}{y_n^3}; -c_n, a_n, b_n).$$

ここで $s \in \mathbb{C}$ は定数である。

Hietarinta と Viallet[2] は φ のカオス性を量るものとして $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \deg(\varphi^n)$ という値を代数的エントロピーと定義した。ここで $\deg(\varphi^n)$ は φ^n の有理写像としての次数である。この量は直線の像と超平面との交叉数を用いて計算でき、今の場合、φ の Picard 群への作用を表す行列を同じ記号 φ で表したとき

$$\log \max\{|\text{ eigennvalues of } \varphi|\} \quad = \quad \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

で与えられることが分かる。また、同様の議論より次のことが分かる。

THEOREM 4 坂井 *[4]* のリストにある離散 *Painlevé* 方程式に対して、n ステップ後の次数 $\deg(\varphi^n)$ は高々$O(n^2)$ であり、従って代数的エントロピーは 0 である。

ここで坂井 [4] のリストにある離散 Painlevé 方程式とは、次のようなものである。
まず次のような有理曲面 X を一つとって固定する。
i)D_i と K_X の交叉数は 0。(これより X は $\mathbb{P}^2$ からの 9 点ブローアップで出来ることが従う。)
ii)$-K_X$ を実現する因子はただ一つである。
次に $\mathrm{Pic}(X)$ の同型で a),b),c) という条件を満たすもの全体の成す群を調べると、これは拡大された affine Weyl 群となる。坂井 [4] のリストにある離散 Painlevé 方程式とは、この affine Weyl 群の平行移動から定まる力学系である。

付録

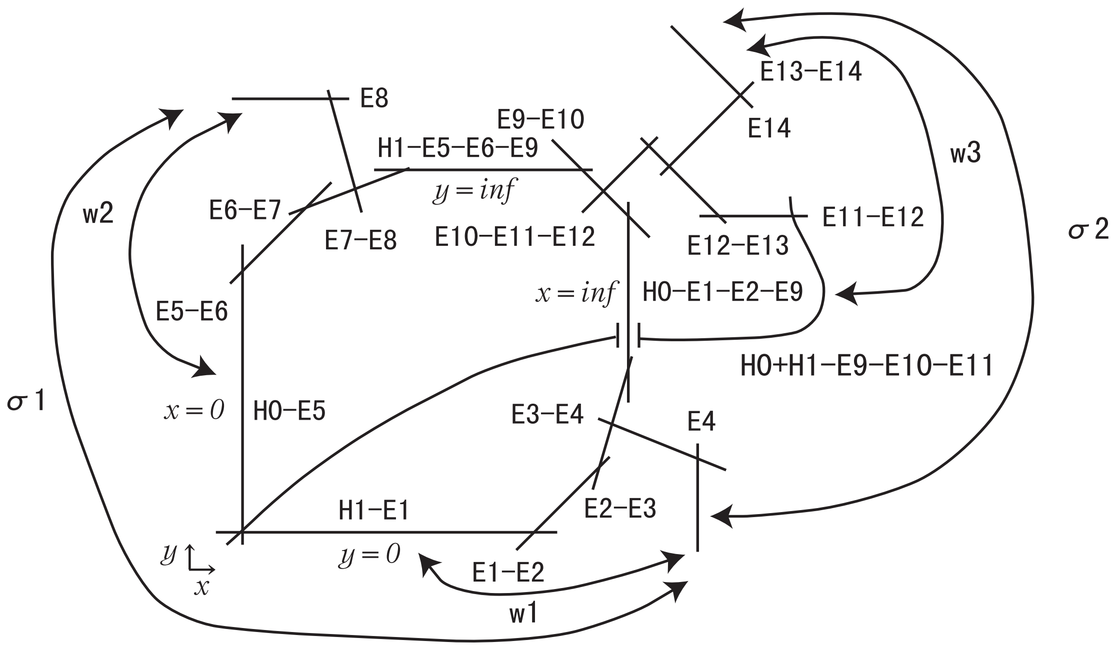


図 1:

上図で、H_0,H_1,E_i はそれぞれ、$x = \mathrm{constant} \in \mathbb{P}^1$, $y = \mathrm{constant} \in \mathbb{P}^1$,$i$ 番目にブローアップする点の全変換を表している。交叉形式は

$$H_i \cdot H_j = 1 - \delta_{i,j},\ E_k \cdot E_l = -\delta_{k,l},\ H_i \cdot E_k = 0$$

で与えられる。任意の 2 つの代数曲線の交叉数はそれぞれに対応する因子の線形同値類同士の交叉数と一致することが知られている。

また、w_i は Weyl 群の生成元を、σ_i は Dynkin 図の生成元を表している。

参考文献

[1] Grammaticos B, Ramani A and Papageorgiou V 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 1825

[2] Hietarinta J and Viallet C M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 325

[3] Okamoto K 1979 *Japan J. Math.* **5** 1

[4] Sakai H 1999 Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations
http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/preprint/preprint99.html